

解析学 第6回

級数展開

- 数列と級数
- べき級数
- 収束半径

べき級数とテーラー展開

- テーラー展開
- 正則関数のべき級数表示
- べき級数の性質

ローラン展開と級数

- ローラン展開
- 特異点

複素数列

複素数 z_n ($n=0,1,2,\dots$) を数列の項として
 $z_0, z_1, z_2, \dots$ または $\{z_n\}$ と書く.

複素数列が複素数 c に収束する場合は

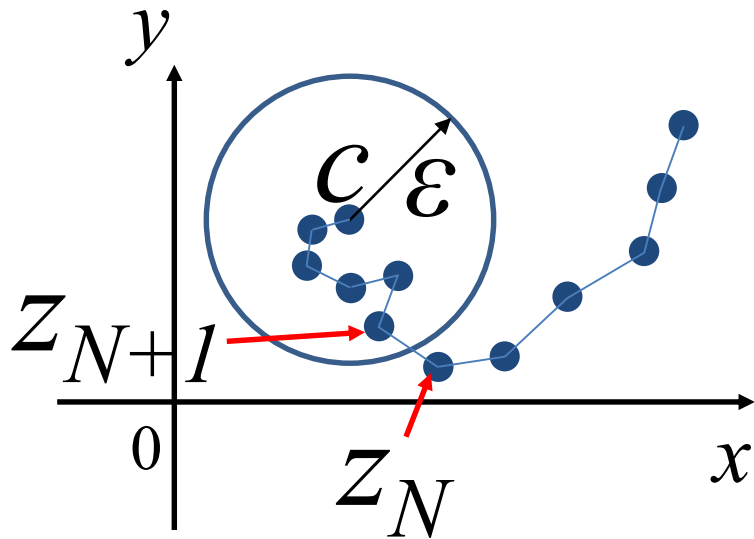
$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c \quad \text{または} \quad z_n \rightarrow c$$

と書く.

収束する数列： 収束数列

収束しない数列： 発散数列

「収束する」とは？



数列 z_n の N 番目以降
 $n > N$ の全ての項が
半径 ε の円内に入る

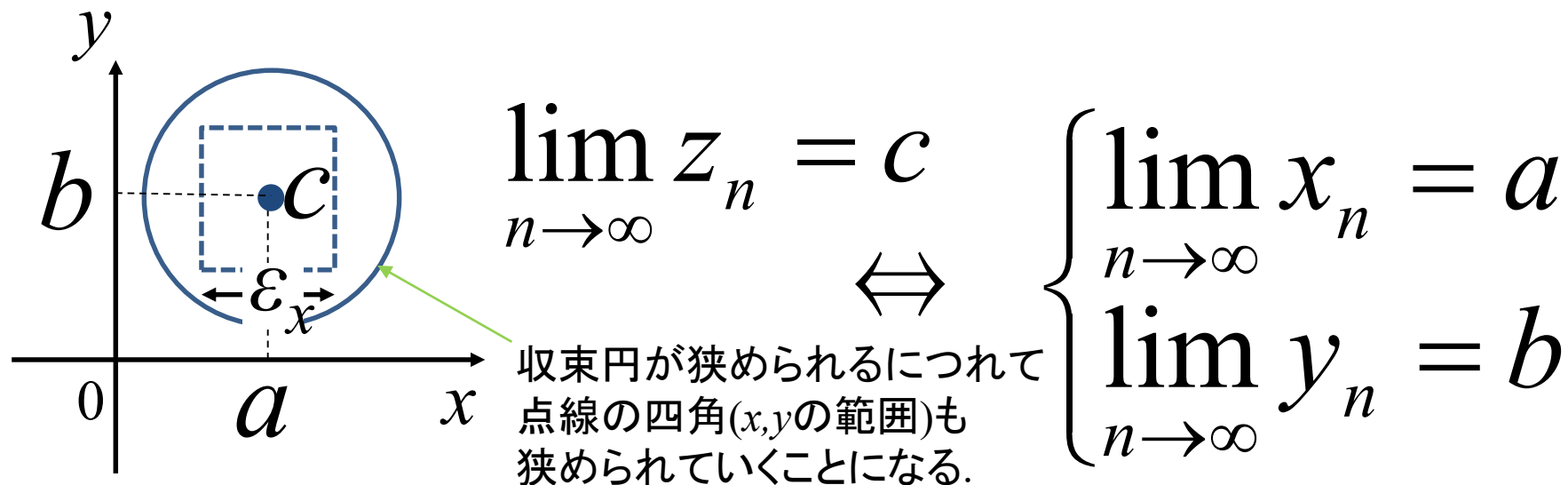
$$|z_n - c| < \varepsilon \quad (11.1)$$

どんなに小さな ε を選んでも, そのような N が存在するとき, 「収束する」という. (≡収束の定義)

「収束する」とは？

実部, 虚部との対応を調べる.

$$z_n = x_n + iy_n, \quad c = a + ib \quad \text{とすると}$$



複素数列の収束/発散

$\Leftrightarrow$ 実部・虚部の収束/発散

数列が「有界」とは？

数列 $z_0, z_1, \dots$ を考える.

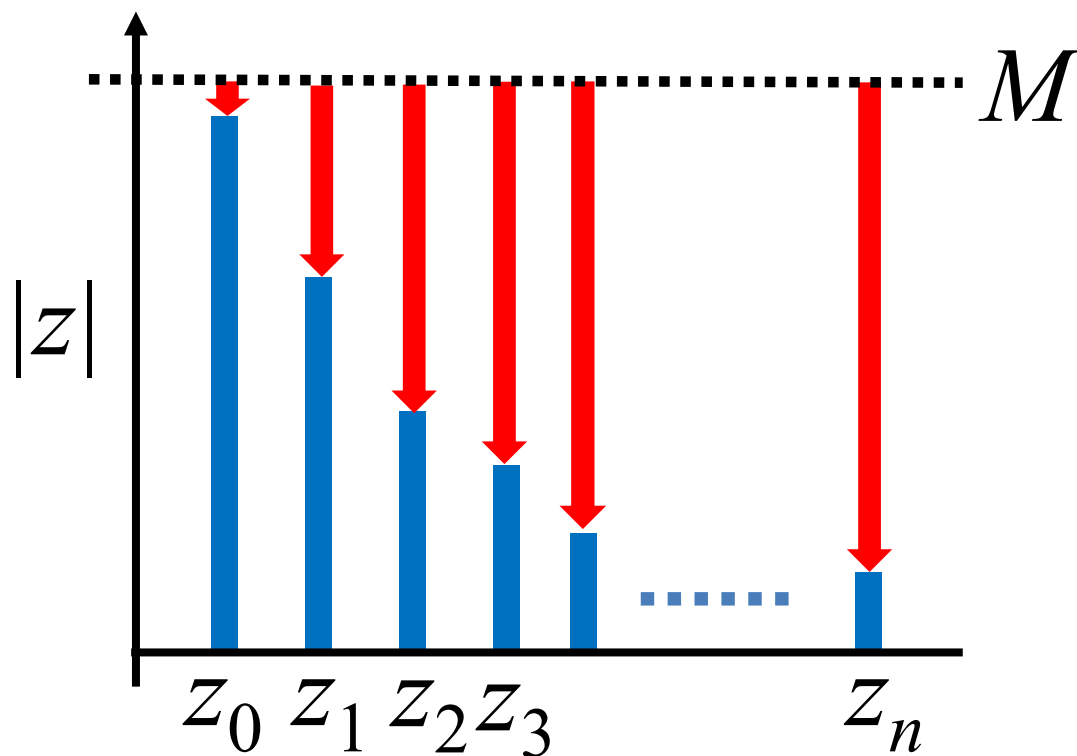
すべての n に対して $|z_n| \leq M$ であるような

有限な実数 M が存在するとき,

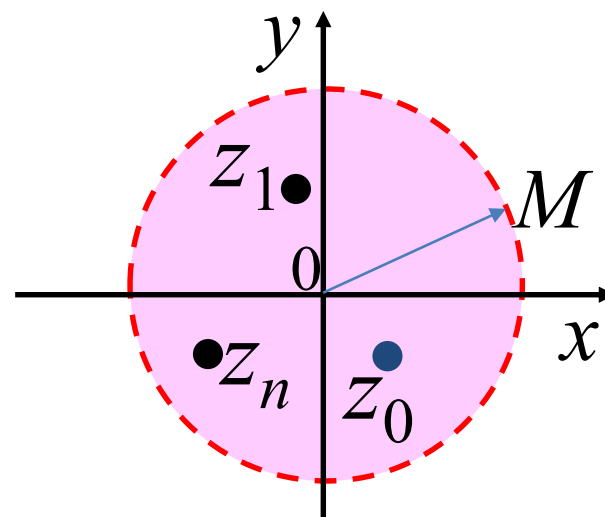
数列 $\{z_n\}$ は **有界** であるという.

有界のイメージ

すべての n に対して $|z_n| \leq M$



半径 M の円内に $\{z_n\}$ が
全て入っている状況



級数

数列 $z_0, z_1, \dots, z_m, \dots$ の各項の総和を
級数という

$$\sum_{m=0}^{\infty} z_m = z_0 + z_1 + z_2 + \dots \quad (11.2)$$

$$\sum_{m=0}^n z_m = z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_n \equiv S_n$$

0～ n 項目までの和を部分和という.

収束級数

部分和が $n \rightarrow \infty$ の場合に収束する場合を
収束級数といい, $n \rightarrow \infty$ での和 S を級数の和という.
すなわち, 部分和を

$$\sum_{m=0}^n z_m = z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_n \equiv S_n$$

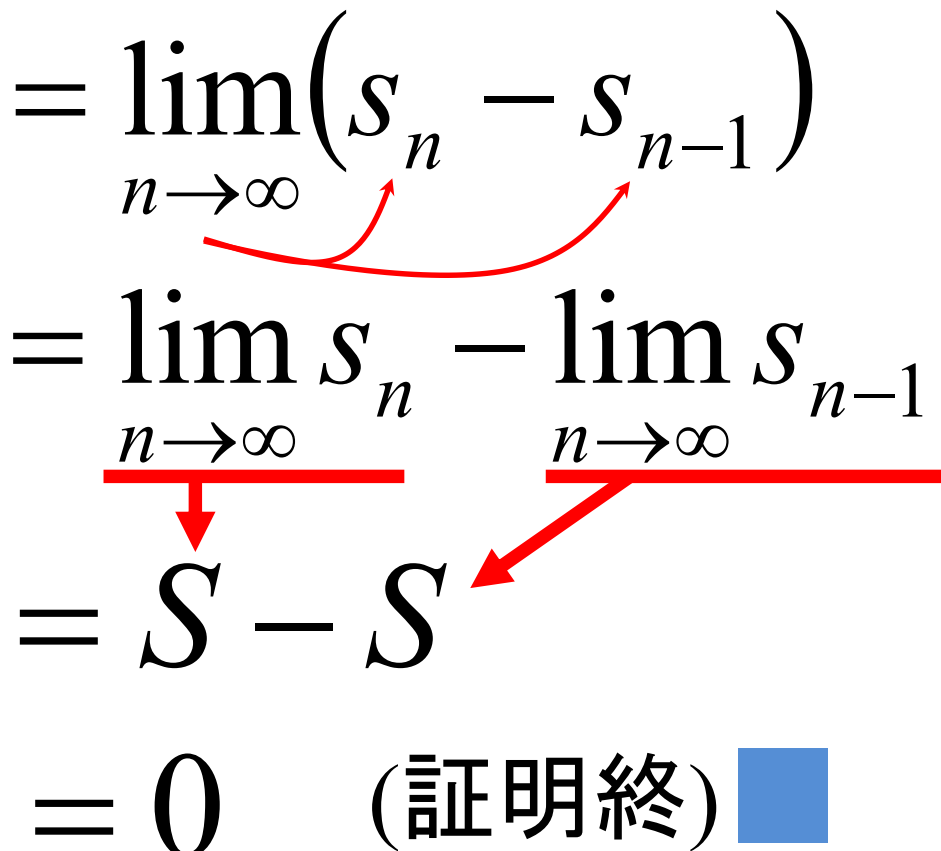
とするとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \text{または,} \quad \sum_{m=0}^{\infty} z_m = S$$

級数が和 S に収束するときは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 \quad \text{が成り立つ.}$$

証明) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1}$$
$$= S - S$$
$$= 0 \quad (\text{証明終})$$


なお、 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$

でも級数が収束しない
場合があることに注意！

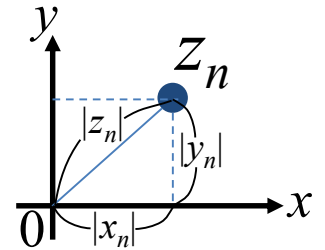
絶対収束

級数の項の絶対値から成る級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ が

収束するとき、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ は

絶対収束するという。

級数が絶対収束すれば、 その級数は収束する



証明) $z_n = x_n + iy_n$ とするとき、

$|x_n| \leq |z_n|$, $|y_n| \leq |z_n|$ だから, $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ が収束するなら

それよりも小さい $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$, $\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|$ はともに収束する.

$\left| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ より, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ は収束するので
三角不等式

$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ も収束する.(証明終)

$|z_n| \leq M_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) となる実数項の
収束級数 $M = \sum_{n=0}^{\infty} M_n$ が存在すれば
級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ は絶対収束する

証明)

一項一項同士の大小関係から

$$|z_0| + |z_1| + \dots + |z_n| \leq M_0 + M_1 + \dots + M_n \leq M$$

だから, $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ は収束する. よって,

$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ が絶対収束することが示された.
(証明終) 

収束する級数よりも絶対値が小さければ, その数列は収束する

べき級数

項が $(z-z_0)$ の累乗で表される級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots \quad (11.3)$$

係数 中心

べき級数表示の用途:

- 正則関数の表示
- 複素積分の計算

次に, 収束条件を調べよう

べき級数の収束条件

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \underline{z_0})^n$ が $z = z_1$ ($\neq z_0$) で収束すると

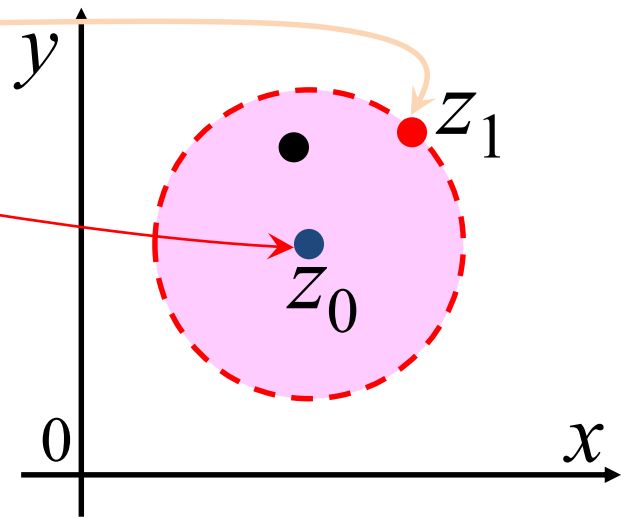
仮定すると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n (z_1 - z_0)^n = 0 \text{ だから}$$

絶対値は有界で

$|a_n (z_1 - z_0)^n| < M_n$ となる収束級数 M が存在する.

右図のように, z_1 よりも z_0 に近い複素数 z を考えると, n 番目の級数項の絶対値は



$$\left| a_n (z - z_0)^n \right| = \left| a_n (z_1 - z_0)^n \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^n \right| \leq M_n \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n$$

同じ項を掛けて割る

となる. z の方が z_0 に近いと定義したのだから

$$\left| z - z_0 \right| < \left| z_1 - z_0 \right| \quad \text{なので,} \quad \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n < 1 \quad \text{である.}$$

その結果, $\left| a_n (z - z_0)^n \right| < M_n$ となり,

実数項の収束級数 M が存在することになるから, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ は収束する.

要するに, 収束することがわかっている z よりも内側なら必ず収束する.
外側だったら収束するかどうかは保証の限りではない. ($M_n \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n < M_n$ なら可能性はあるが)

べき級数の例：等比級数

べき級数の定義式(11.3):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

に, $z_0 = 0, a_n = 1$ を代入すると,

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m = 1 + z + z^2 + \dots \quad (11.4)$$

初項1, 公比 z の
等比級数

等比級数の収束性

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m = 1 + z + z^2 + \dots$$

$|z| \geq 1$ のとき, $|z^m| \geq 1$ となるから, $\because |z^m| = |z|^m$

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$ であり, 級数は発散する.

$|z| < 1$ のとき, 部分和 $s_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$

を z 倍し, $z \cdot s_n = z + z^2 + \dots + z^{n+1}$ 差を取ると
途中の項が消えて $s_n - z \cdot s_n = 1 - z^{n+1}$

$$\Leftrightarrow (1-z) \cdot s_n = 1 - z^{n+1}$$

$|z| \neq 1$ の条件の下で, 部分和 s_n を求めると

$$s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad n \rightarrow \infty \text{ の極限をとると}$$

$|z| < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1} = 0$ を使うと

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right) = \frac{1}{1 - z} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{z^{n+1}}{1 - z} \right) \\ &= \frac{1}{1 - z} \quad \text{と級数の値が求まる(収束する).} \end{aligned}$$

収束半径

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ が

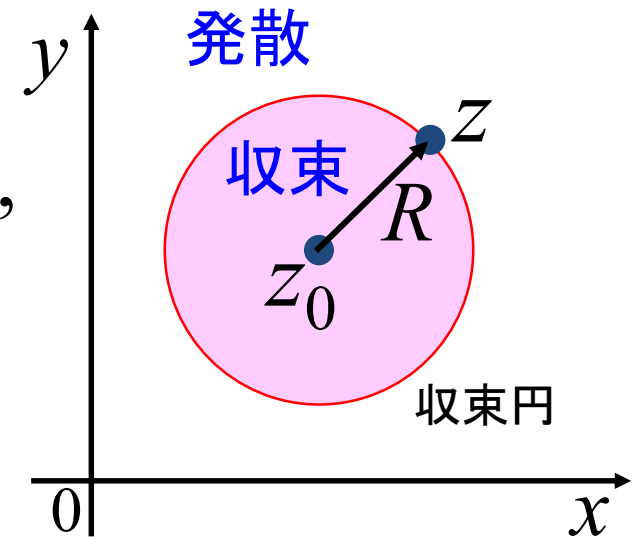
$|z - z_0| < R$ の全ての点で収束し,

$|z - z_0| > R$ で発散する場合,

$|z - z_0| = R$ を収束円といい,

R を収束半径という.

全ての R で収束すれば, $R = \infty$, 一方, 点 z_0 でのみ収束するなら $R = 0$. 収束円の円周上では条件により収束 or 発散する.



べき級数の収束半径

級数の収束条件は、級数の各項の絶対値をとった級数の収束条件を求めればよいのであった。

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ の各項の絶対値をとると

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z - z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n$$

$|a_n| = 1$ の時は等比級数だから収束条件は
 $|z - z_0| < 1$ なので収束半径 $R=1$ だった。

$|a_n|$ の n 乗根をとって, n 乗の $()$ の中に入れると
(単なる実数の n 乗根)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z - z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0| \right)^n$$

この $()$ の中の各項は正の実数なので, 総和が収束するには, $n \rightarrow \infty$ で

$$\sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0| < 1 \quad \text{が必要.}$$

もしそうでないと $n \rightarrow \infty$ で n 回乗じた $|a_n| |z - z_0|^n$ が $\rightarrow 0$ にならないから

一方, $\geq$ ならば必ず発散.

従って収束に必要な条件は, $n \rightarrow \infty$ で

$$|z - z_0| < \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \equiv R \quad \leftarrow \text{収束半径}$$

極限を式で表すと,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

コーシー・アダマールの公式

(十分条件でもあることは別途証明)

もう一つの考え方:

べき級数の各項の絶対値を取った式に戻ります...

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z - z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n$$

 n 番目の項と $n+1$ 番目の項の比を取ると

$$\frac{|a_{n+1}| |z - z_0|^{n+1}}{|a_n| |z - z_0|^n} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z - z_0|$$

各項は必ず正の実数だから、この倍率が1を超えると、項の値は $n \rightarrow \infty$ で必ず発散する。これを防ぐには

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z - z_0| < 1 \iff |z - z_0| < \boxed{\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} \equiv R \quad \leftarrow \text{収束半径}$$

ダランベールの公式

収束半径の判定法(まとめ)

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

ダランベールの公式

(11.6)

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

コーシー・アダマールの公式 (11.7)

先の導出では, 項の発散を防ぐ条件(必要条件)として収束半径を導いたが, 級数(総和) が収束すること(十分条件)の証明は別途. → Appendix

例題 11. 3 次のべき級数の収束円の中心と収束半径を求めよ.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - \pi)^n}{n^n}$$

解) n 乗を含むのでコーシー・アダマールの公式(11.7)を使う. $a_n = \frac{1}{n^n}$ だから

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

よって、中心は π , 収束半径は無限大.(答)

(z が複素平面上のどこであっても収束する)

例題 11.3 次のべき級数の収束円の中心と収束半径を求めよ.

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} n!(z-1)^n$$

解) 階乗を含むので,ダランベールの公式(11.6)を使う. $a_n = n!$ より

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

よって,中心は1, 収束半径 $R=0$ (答)

(z が複素平面上のどこであっても収束しない)

例題 11.3 次のべき級数の収束円の中心と収束半径を求めよ.

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$$

解) 階乗を含むので, ダランベールの公式(11.6)を使う. $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ より

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+2)! \cdot (n!)^2}{\{(n+1)!\}^2 \cdot (2n)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 + 2/n)(2 + 1/n)}{(1 + 1/n)^2} = 4 \end{aligned}$$

よって, 中心は0, 収束半径 $R=1/4$ (答)

べき級数とテーラー展開

正則関数のテーラー展開は, z_0 を中心とすると次のように表される.

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + .. \\ + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + ... \quad (12.1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (12.2)$$

(実数の場合と形式は同じ)

マクローリン展開

$z_0=0$ を中心とするテーラー展開をマクローリン展開とよぶ.

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \end{aligned} \tag{12.3}$$

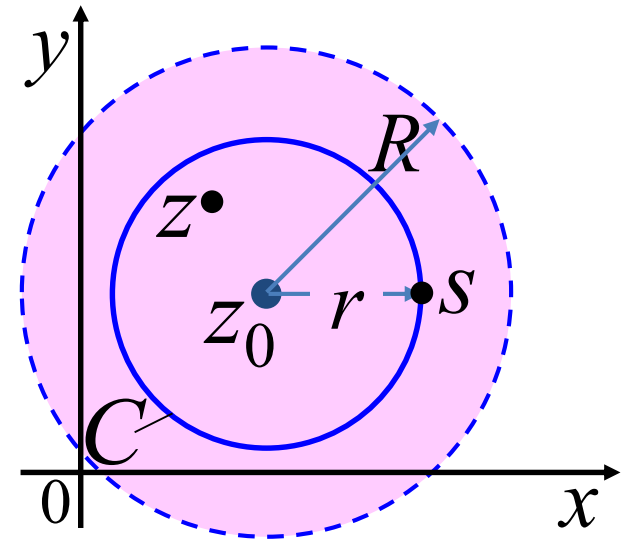
(実数の場合と形式は同じ)

テーラー展開の導出

関数 $f(z)$ は点線の円の内部 $|z-z_0|=R$ の内部で**正則**とする。

点線の円の内部, すなわち $0 < r < R$ を満たす半径 r , 中心 z_0 の円 C を考える。

円 C 内に任意の点 z をとる。



コーシーの積分公式(10.1)の

z_0 は C 内の任意の点を取ってよいので, これをあらためて z と置く。その代わり

積分変数 z との混同を避けるため, 積分変数 z を s と置き換える。

すると,

$$f(\boxed{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s - \boxed{z}} ds \quad (10.1)'$$

$$f(\boxed{z_0}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \boxed{z_0}} dz$$

テーラー展開の導出

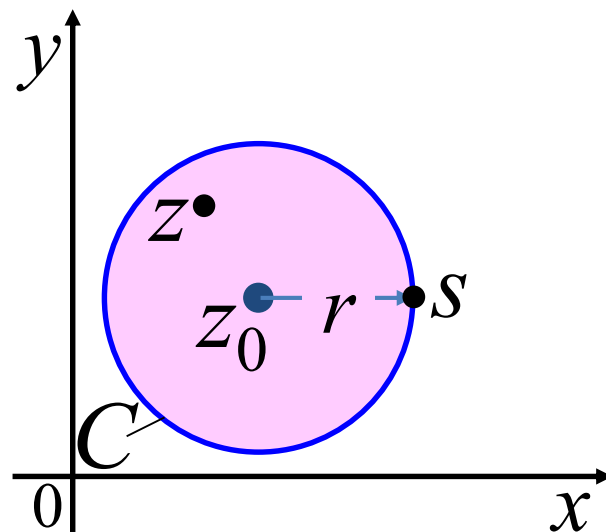
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s-z} ds$$

点 s は円 C 上を動き, z は C の内

部なので,

$$\left| \frac{z - z_0}{s - z_0} \right| < 1$$

分母と分子の大小関係
(どちらが z_0 に近いかが
決定的に重要)



左辺の中身を等比級数の「公比」と見立てて(公比 <1 で収束が保証されるから), $1/(s-z)$ の部分等を等比級数に展開する.

等比級数の式(11.5)から, $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{s-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{s-z_0}} =$$

z_0 を引いて足す $s-z_0$ でくり出す

テーラー展開の導出

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{s-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{s-z_0}} =$$

z_0 を引いて足す
 $(s-z_0)$ をくくり出す
 実は最初にこの項ありき

$$\frac{1}{s-z_0} \left\{ 1 + \frac{z-z_0}{s-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{s-z_0} \right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{s-z_0} \right)^3 + \dots + \left(\frac{z-z_0}{s-z_0} \right)^n + \dots \right\}$$

等比数列の和の公式

これを(10.1)'式に代入する

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s-z} ds$$

この時, $(z-z_0)$ のべき項は, 積分変数 s と無関係なので積分の外に出すことができる. すると $f(z)$ の表式は,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_C \frac{f(s)}{\underline{s - z_0}} ds + (z - z_0) \int_C \frac{f(s)}{\underline{(s - z_0)^2}} ds + \dots + (z - z_0)^n \int_C \frac{f(s)}{\underline{(s - z_0)^{n+1}}} ds + \dots \right\}$$

べき項 $(z - z_0)^k$ の係数に相当している

よって,

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{と表され, 係数 } a_n \text{ は,}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(テーラー展開: 係数の積分表示)

$$\begin{aligned}
 f(z) &= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\
 a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds \quad (n = 0, 1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

ここで、 $f(z)$ は正則なので微分可能。
 すると、**グルサの公式**を使って、
 係数 a_n を、 z_0 における n 階導関数の値
 $f^{(n)}(z_0)$ で表すことができる。すなわち、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_C \frac{f(s)}{s - z_0} ds + (z - z_0) \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^2} ds + \dots + (z - z_0)^n \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds + \dots \right\}$$

右辺第1項は**コーシーの積分公式**

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \text{より, } f(z_0)$$

第2項以降は**グルサの公式**

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \text{より,}$$

$f'(z_0), f''(z_0), \dots$ を用いて $\frac{f^{(n)}(z)}{n!}$ を各項に代入する.

以上より, **テーラー展開(係数の微分表示)**が導かれる.

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \dots$$

例題 12. 1 $f(z) = \frac{1}{z}$ を $z=1$ を中心に
テーラー展開し, 収束半径を求めよ.

解) $1/z$ の導関数を求めると $f'(z) = (-1) \frac{1}{z^2}$

$$f''(z) = (-1)(-2) \frac{1}{z^3} = (-1)^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{z^3}$$

$$f'''(z) = (-1)(-2)(-3) \frac{1}{z^4} = (-1)^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{z^4}$$

$$\text{だから, } f^{(n)}(z) = (-1)^n n! \frac{1}{z^{n+1}}$$

展開の中心点 $z_0=1$ を代入すると $f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$

よってテーラー展開の係数は $\frac{f^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^n$

これを,テーラー展開の式(12.1)に代入すると

$$f(z) = \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad \underline{\text{(答)}}$$

収束半径はダランベールの公式(11.6)を用いて

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \right| = \underline{1} \quad \underline{\text{(答)}}$$

テーラー展開の収束半径は,展開の中心 $z_0(=1)$ から最も近い特異点($=0$)までの距離に等しい.(後述)

正則関数のべき級数表示

代表的な解析関数($e^z, \sin z, \cos z, \text{Log } z$ など)のテーラー展開,あるいはマクローリン展開は,よく使われるので列挙しておく.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (12.4)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad (12.5)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \quad (12.6)$$

正則関数のべき級数表示

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \quad (|z| < 1)$$

等比級数

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} az^n = a + az + az^2 + az^3 + \dots \quad (|z| < 1) \end{array} \right. \quad (12.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n az^n = a - az + az^2 - az^3 + \dots \quad (|z| < 1) \end{array} \right. \quad (12.8)$$

例題 12.2 等比級数の表式(12.8)を用いて
 $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ をマクローリン展開せよ.

解)

等比級数の表式(12.8)の z を z^2 に置き換えて
 $a=1$ を代入すれば,

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad (|z| < 1) \quad \text{(答)}$$

マクローリン展開の式(12.3)に代入して係数を求めても同じ式が導かれる。
(同一性の保証有り)
 $\cos(z^2)$ なども $\cos(z)$ の式(12.5)を使うと簡単に級数表示が求められる。

例題 12. 3

$f(z) = \frac{2z}{z^2 + 1}$ を中心1でテーラー展開せよ.

解 1) テーラー展開の式(12.2)を使う方法

中心 $z_0=1$ なのでテーラー展開の式より $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (z-1)^n$

ここで $f(z) = \frac{2z}{z^2 + 1} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}$ と部分分数分解すると,

$1/z$ なので n 階微分の表式が簡単に表せて $f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{(z-i)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(z+i)^{n+1}}$

これを代入すれば,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{(1-i)^{n+1}} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \right\} (z-1)^n \quad (\text{答})$$

例題 12. 3

$f(z) = \frac{2z}{z^2 + 1}$ を中心1でテーラー展開せよ.

解2) 等比級数の式(12.8)を使う方法

$f(z) = \frac{2z}{z^2 + 1} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}$ と部分分数分解し,各項に等比級数の式を適用する.

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{1-i} \left(\frac{1}{1 + \frac{z-1}{1-i}} \right) \quad \text{と変形して式(12.8)を使うと, } \left| \frac{z-1}{1-i} \right| < 1 \quad \text{ならば,}$$

等比級数の和

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{1-i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{(1-i)^{n+1}}$$

$\frac{1}{z+i}$ の項についても同様の手順を踏むと

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{1+i} \frac{1}{1 + \frac{z-1}{1+i}} \text{ と変形して } \left| \frac{z-1}{1+i} \right| < 1 \text{ の下では}$$
$$= \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{1+i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{(1+i)^{n+1}}$$

以上の2項を加え合わせると

$$f(z) = \frac{2z}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{(1-i)^{n+1}} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \right\} (z-1)^n \quad (\text{答})$$

解1と同じ結果が得られる。収束条件を次に確認しておく。

収束条件は2つあって, $\left| \frac{z-1}{1\pm i} \right| < 1$ であった.

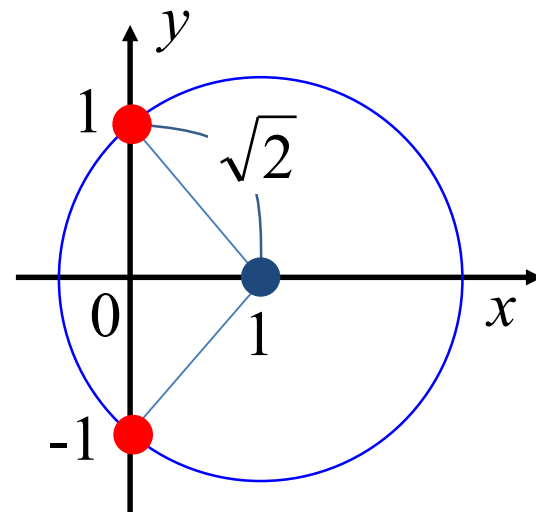
$|1\pm i| = \sqrt{2}$ なので,収束条件は, $|z-1| < \sqrt{2}$ となる.

よって,収束半径は $R = \sqrt{2}$.

$$\text{これは, } f(z) = \frac{2z}{z^2 + 1} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}$$

の特異点 $z=i, -i$ と

テーラー展開の中心 $z=1$ との距離に対応している.



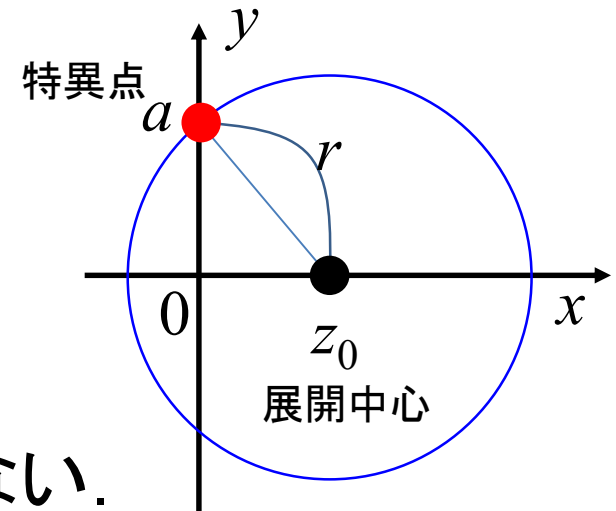
(例題12.3 了)

等比級数を用いた展開のコツ

展開中心を $z=z_0$
特異点を $z=a$ とすると

$$|z-z_0|=|a-z_0|\equiv r$$

という**円の内側**($|z-z_0|<r$)か、または
外側($|z-z_0|>r$)でしか収束は保証されない.



複数の特異点があった場合は, z_0 に近い方の距離 $\equiv r$ とせよ.

$|z-z_0|<|a-z_0|$ の場合は, $(z-z_0)/(a-z_0)$ を,
 $|z-z_0|>|a-z_0|$ の場合は, $(a-z_0)/(z-z_0)$ を**公比** r と考え
等比級数の式 $\frac{1}{1\pm r}$ のどちらかを適用するべく
式を変形する.

べき級数の性質

べき級数を $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ と表すと,

- (1) べき級数 $f(z)$ は収束半径の内部領域 $D: |z - z_0| < R$ で連続
- (2) $f(z)$ は項別積分可能: $\int_C f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_C a_n (z - z_0)^n dz$
- (3) $f(z)$ は項別微分可能: $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$
- (4) $f(z)$ は収束円内で正則
- (5) 項別微分, 項別積分して得られる べき級数 の収束半径も R
- (6) べき級数が $f(z)$ に収束すれば, そのべき級数はテーラー展開と一致する

非正則点を中心に べき級数展開したい場合

- テーラー展開は使えない(はず).
- ではどうするか？
 - テーラー展開を形式的に無理やり使う.
ただし,収束半径をきちんと確かめる必要がある.
(正しく使える場合もある.理由は後述.)
- 非正則点を含む場合のべき級数展開の一般論
 - ローラン展開

ローラン展開

点 z_0 を中心とするローラン展開は、次のように表される.

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{正則部}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}}_{\text{主要部}} \end{aligned} \quad (13.2)$$

ローラン展開に負のべき乗項が追加されている

ただし,

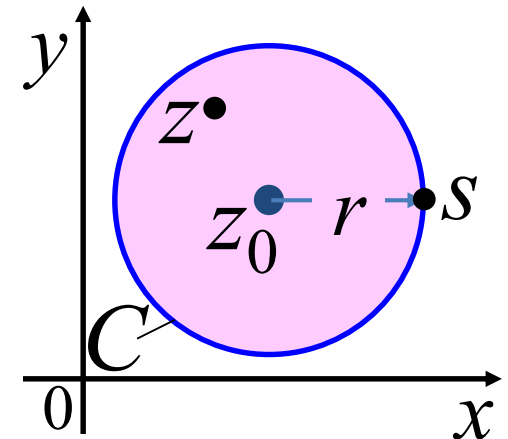
$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C (s - z_0)^{n-1} f(s) ds & (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

正則部はテーラー展開と同じ

ローラン展開の導出

関数 $f(z)$ が円 C 内の任意の点で**正則**ならば,

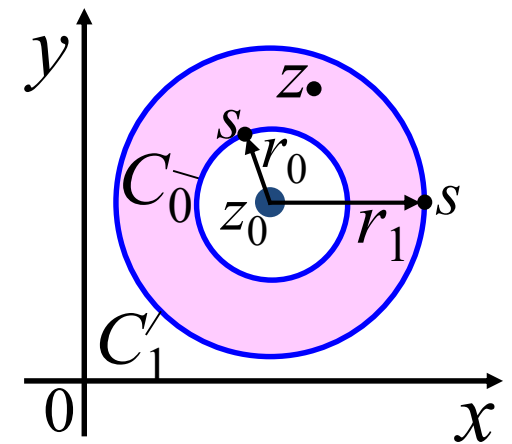
点 z_0 を中心として, C 内の任意の点 z で使えるテーラー展開の表式が $(z-z_0)$ のべき級数として得られる.



一方,下の図のように,

$f(z)$ が,半径 $r_0 < r < r_1$ の円環内(色つき部分)では正則だが,点 z_0 と半径 r_0 の円よりも内側では**正則ではない**場合は,

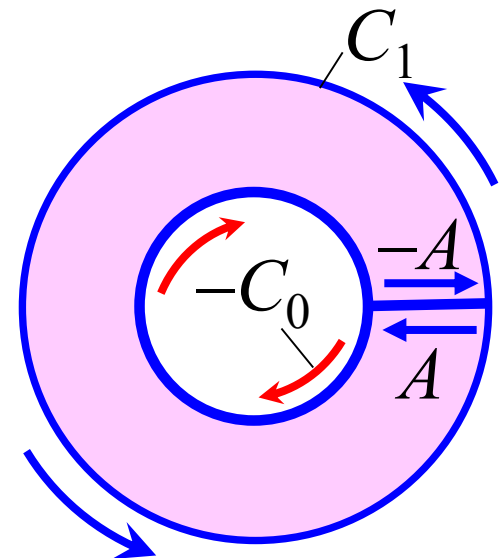
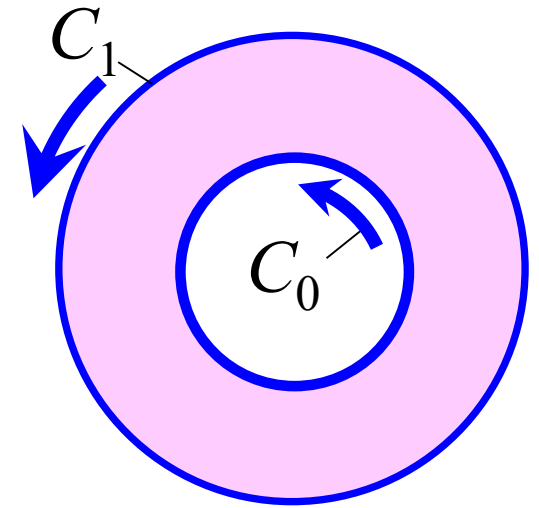
点 z_0 を中心として,円環内の任意の点 z で使えるテーラー展開はできない.



しかし,積分路を少し工夫すれば,単連結領域で正則な $f(z)$ に対してコーシーの積分公式を適用できる!

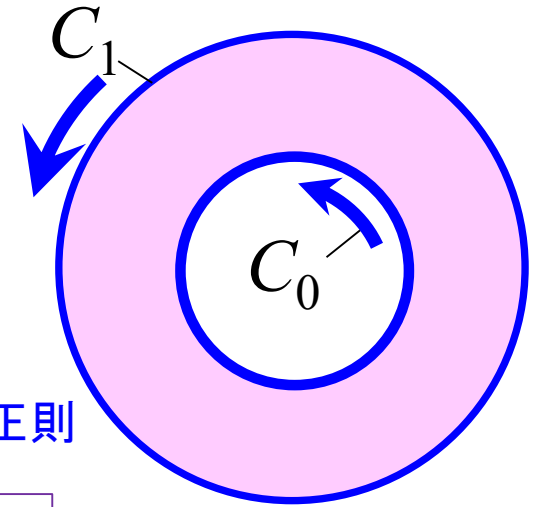
積分路の取り方

積分路が2重連結領域であることから、もともとの積分路(右上図)に、右下図のような切れ込みを1本入れて、単連結領域とみなし、一筆書きで周回積分する。



積分路の取り方

積分路が2重連結領域であることから、もともとの積分路(右上図)に、右下図のような切れ込みを1本入れて、単連結領域とみなし、一筆書きで周回積分する。



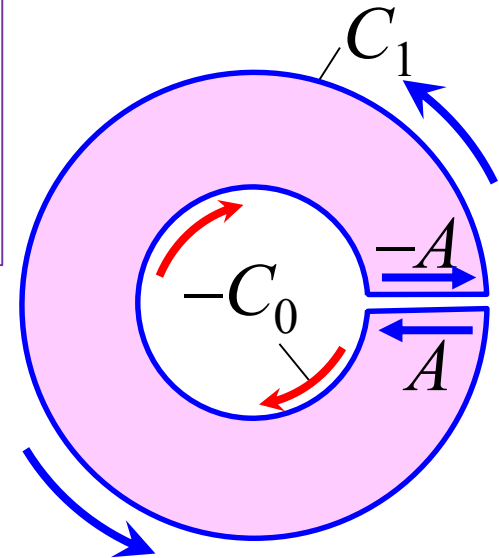
$f(z)$ は色つき領域で正則

コーシーの積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 + A - C_0 - A} \frac{f(s)}{s - z} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 - C_0} \frac{f(s)}{s - z} ds$$

ただし、積分路は反時計回りを正(+)としたので、内側の積分路は $-C_0$ となる。



$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s - z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s)}{s - z} ds$$

(13.1)

→次に、それぞれの項について級数展開表示を求める

$f(z)$ は単連結領域で正則なので、いまさらだが、テーラー展開の式がそのまま使えるのではないか？という疑問がわく(しかし今の場合それは間違い.).

z が正則な領域(色つきの円環領域)にあれば、コーシーの積分公式の適用までは問題ない.従って、前ページ最後の式は有効である.問題は、展開中心 z_0 との位置関係であり、展開中心 z_0 の位置関係によってはテーラー展開を導出した際に使った等比級数の収束条件が満たされない,ということが起こる.

前ページ最後の式の第1項については、テーラー展開の表式を導出した状況と全く同様なので、 z と展開中心 z_0 と積分路上の点 s との位置関係が、テーラー展開のときと同様の収束の条件を満たしている.したがって、テーラー展開の表式の導出過程がそのまま適用可能であり、結果も完全に一致する.(しかし、 $f(z)$ は z_0 で微分できないので、 z_0 での微係数を用いた係数の表現は使えない. 係数を周回積分で表した式までが有効.)

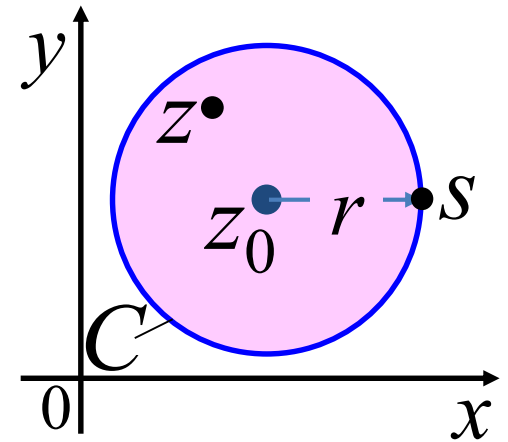
しかし、一方、第2項の積分を見ると、積分路上の点 s と z ,そして、展開中心 z_0 の位置関係($|z - z_0|$ と $|s - z_0|$ の大小関係)が、テーラー展開を導出したときとは真逆になっていることがわかる.(点 z が積分円周の外側にあるから.)したがって、テーラー展開を求めた際に用いた等比級数による展開は使えない($|公比| > 1$ により発散してしまうから).その代わり、この状況で収束が保証される「公比」をあらためて見出して、その新たな「公比」を使って等比級数展開の表式を組み立てなおさなければならぬのである.その「公比」は、テーラー展開のときに使った「公比」の逆数と考えればよい.次に具体的な表式を見ていく.

ローラン展開の導出

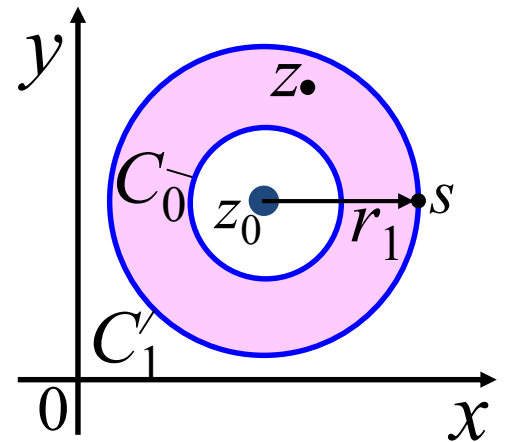
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s)}{s-z} ds \quad \text{式(13.1)}$$

右辺第1項について今一度,積分路と各座標の位置関係を確認する.

上の図が,テーラー展開を導出した際の積分路と展開中心 z_0 ,そして正則領域内の任意点 z の関係を示す.



下の図は z_0 を中心に非正則な箇所がある今回のケースだが,外側の積分路 C_1 上における第1項の積分では, z は必ず円 C_1 の内側なので,積分路 C_1 上の点 s よりも点 z の方が常に z_0 に近い,すなわち



$$|s - z_0| > |z - z_0| \iff \left| \frac{z - z_0}{s - z_0} \right| < 1$$

この事情はテーラー展開の場合と同じ.

したがって同じ公比で等比級数展開ができて、結局テーラー展開と同じ式が導かれる。

よって、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s)}{s-z} ds \quad \text{式(13.1)の}$$

(右辺第1項) = $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ただし、 $f(z)$ は z_0 で非正則なので、 z_0 における微係数が存在しないことから、正則関数のときのように z_0 における微係数 $f^{(n)}(z_0)$ と $n!$ で係数 a_n を表すことはできない。上の式の周回積分を別途計算する必要がある。(微分は常に可能だが、この積分が必ず解けるとは限らない。そこが積分のつらいところ。)

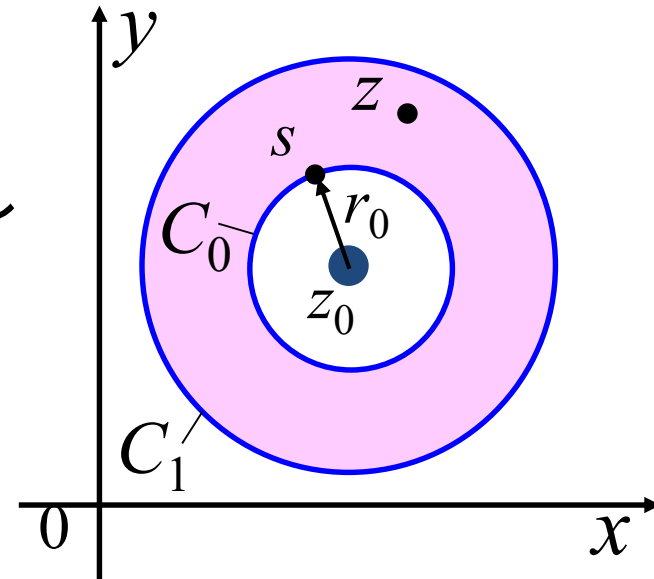
ローラン展開の導出

次に、右辺第2項の級数展開について考える。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s)}{s-z} ds \quad (13.1)$$

右辺第2項では積分路が**内側の円の積分路**
 C_0 なので、この場合、 z は積分路上の s よりも必ず外側、すなわち z_0 からより遠い位置にある。したがって、テーラー展開の時と大小関係が逆になって、

$$|s - z_0| < |z - z_0| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{s - z_0}{z - z_0} \right| < 1$$



従って、テーラー展開を導出する過程で用いた $|(z-z_0)/(s-z_0)|$ を公比に用いると公比 >1 で等比級数が発散してしまうので、その逆数である $(s-z_0)/(z-z_0)$ を公比とみなして、等比級数に展開する必要がある。

ローラン展開の導出

$$\frac{1}{z-s} = \frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{s-z_0}{z-z_0}} =$$

実は最初にこの項ありき

z_0 を引いて足す

$(z-z_0)$ をくくり出す

等比数列の和の公式

$$\frac{1}{z-z_0} \left\{ 1 + \frac{s-z_0}{z-z_0} + \left(\frac{s-z_0}{z-z_0} \right)^2 + \left(\frac{s-z_0}{z-z_0} \right)^3 + \dots + \left(\frac{s-z_0}{z-z_0} \right)^n + \dots \right\}$$

これを(13.1)式右辺第2項に代入する

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s)}{s-z} ds$$

この時, $(z-z_0)$ のべき項は, 積分変数 s と無関係なので
積分の外に出すことができる. すると,

(13.1)後半の項

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s)}{s-z} ds = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{z-z_0} \int_{C_0} f(s) ds + \frac{1}{(z-z_0)^2} \int_{C_0} (s-z_0) f(s) ds + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \int_{C_0} (s-z_0)^n f(s) ds + \dots \right\}$$

以上より,前半の項と後半の項を加え合わせると,(13.1)は

ローラン展開

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots \\ = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\text{正則部}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}}_{\text{主要部}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{テーラー展開に} \\ \text{負のべき乗項が} \\ \text{追加されている} \end{array} \right) \quad (13.2)$$

ただし,
$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds & (n=0,1,2,\dots) \\ b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C (s-z_0)^{n-1} f(s) ds & (n=0,1,2,\dots) \end{cases}$$

正則部はテーラー展開と等価

- **正則部**はテーラー展開と同じ.ただし, z_0 が非正則点で微係数が存在しない場合は,正則関数のときと同じ公式(微係数と階乗)で各係数を表すことはできない. (微係数は存在しなくても(13.2)式の周回積分は存在する)
- **主要部**の係数も,式の通り積分を実行して求める必要がある. (コーシーの積分定理・公式を適用して意外と簡単に計算できる場合もある→積分で重要なのは $1/(z-z_0)$ の係数だけ)
- 特殊なケースでは,等比級数や,マクローリン展開など,既に知られている級数展開を式変形することによって,ローラン展開の係数を全て求めることができる場合もある.

例題13. 1 $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ を $z=0$ を中心に
べき級数展開せよ.

解)

$f(z)$ は $z=0$ で正則ではないからローラン展開する.

e^u のマクローリン展開 $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ において

$$u = \frac{1}{z} \text{ とおけば, } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z} \right)^n \quad (\text{答})$$

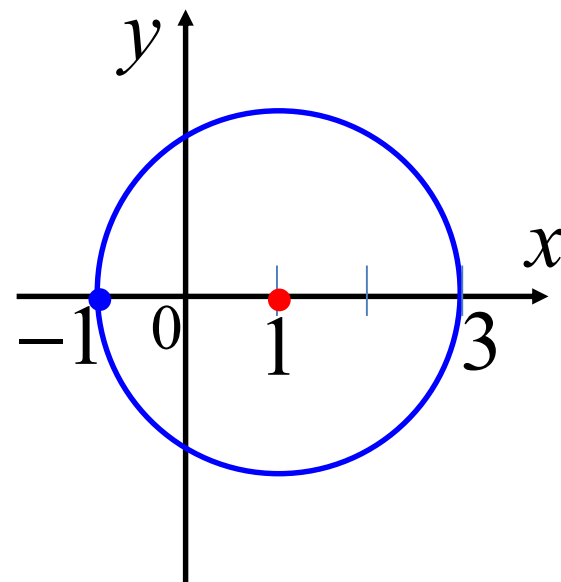
例題13. 2 $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ を $z=1$ を中心に

$|z-1| < 2$ の範囲でべき級数展開せよ.

解) $f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z+1}$

展開中心である $z=1$ で $f(z)$ は
正則ではない.

このため, 等比級数の式を使って
ローラン展開する.



収束条件の不等式を

$$|z-1| < 2 \Leftrightarrow \frac{|z-1|}{2} < 1 \text{ と変形し,}$$

「公比」が $(z-1)/2$ であることを確認する. そして,

展開の中心で発散しない第2項 $\frac{1}{z+1}$ から, 公比

$\frac{z-1}{2}$ をくりだす. $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}}$

$\left| \frac{z-1}{2} \right| < 1$ より, $(z-1)/2$ を公比とみなして, 等比級数の式を適用すると.

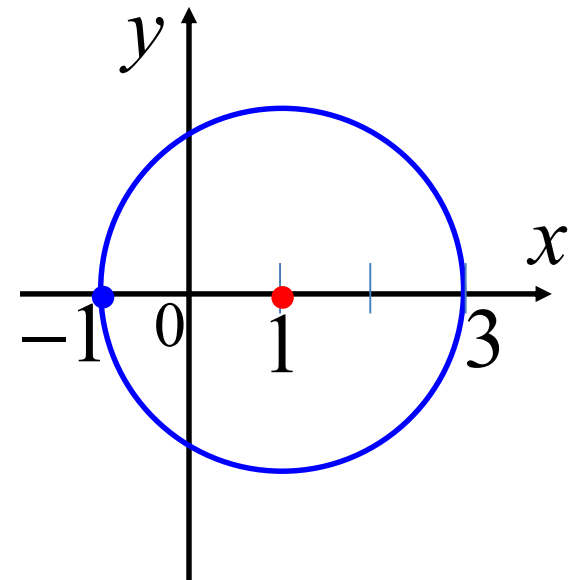
$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{2} \right)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} (z-1)^n$$

よって, $f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-1} \cdot \left\{ - \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} (z-1)^n \right\}$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} (z-1)^{n-1} \quad (\text{答})$$

収束円の切り替え

前の例題では, $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ を
右図の円の**内側** $|z-1| < 2$ で
収束する級数に展開したが,
円の**外側** $|z-1| > 2$ で収束する
級数に展開することもできる.
→次の例題で解いてみよう.



例題13. 2' $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ を $z=1$ を中心に

$|z-1| > 2$ の範囲でべき級数展開せよ.

解) $f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z+1}$

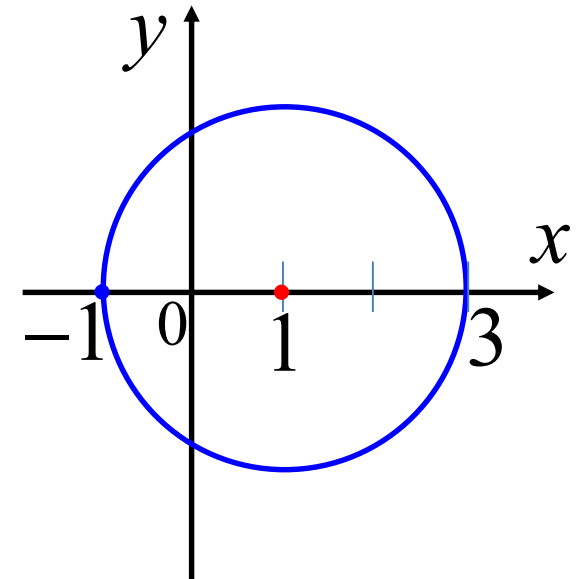
展開中心である $z=1$ で $f(z)$ は
正則ではない.

このため, 等比級数の式を使って
ローラン展開する.

収束条件の両辺逆数を取って

$$|z-1| > 2 \Leftrightarrow \frac{2}{|z-1|} < 1 \quad \text{と変形し,}$$

「公比」が $2/(z-1)$ であることを確認する. そして,



公比 $\frac{2}{z-1}$ の等比級数の式として $\frac{1}{1 \pm \frac{2}{z-1}}$ の
 どちらか(+ or -)を使いたい.

実際, + の方を計算してみると, 分母分子に $(z-1)$ を乗じて

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{z-1}} = \frac{z-1}{z-1+2} = \frac{z-1}{z+1}$$

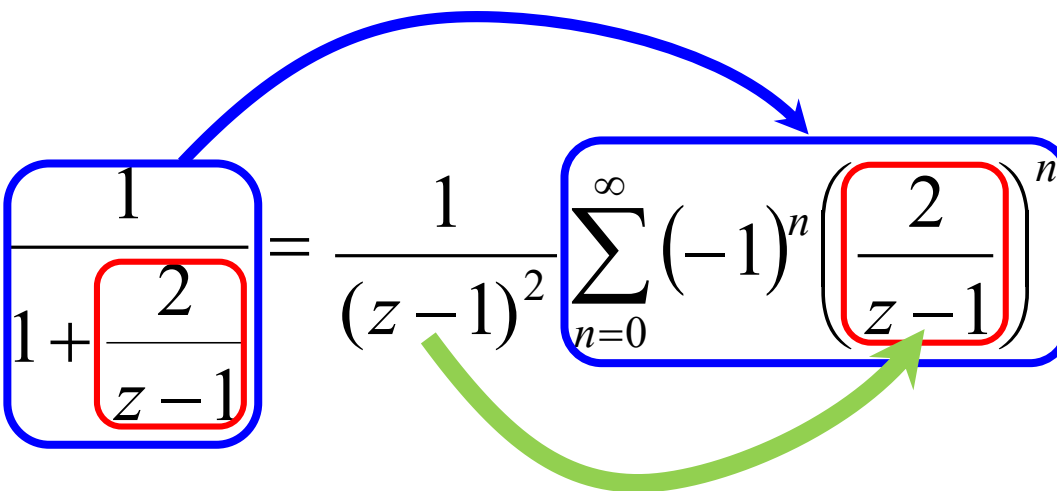
なので, 都合よく

$$\frac{1}{z-1} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)^2} \frac{1}{1 + \frac{2}{z-1}}$$

と変形できる.

よって,

等比級数の式で展開すると

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)^2} \frac{1}{1 + \frac{2}{z-1}} = \frac{1}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{z-1} \right)^n$$


べき項をまとめる

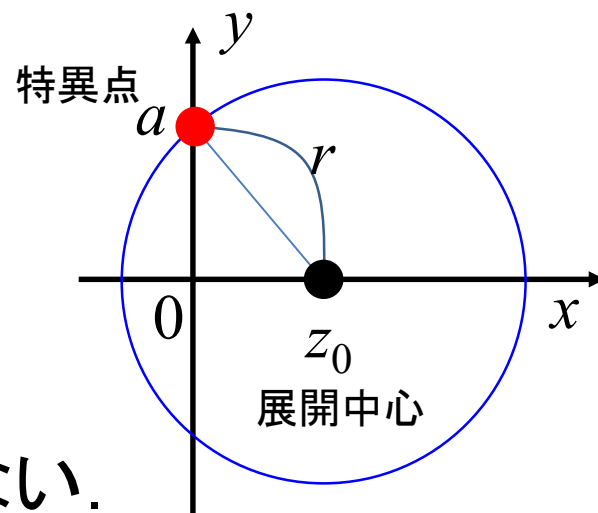
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}} \quad \text{(答)}$$

等比級数を用いた展開のコツ(再)

展開中心を $z=z_0$
特異点を $z=a$ とすると

$$|z-z_0|=|a-z_0|\equiv r$$

という**円の内側**($|z-z_0|<r$)か、または
外側($|z-z_0|>r$)でしか収束は保証されない.



複数の特異点があった場合は, z_0 に近い方の距離 $\equiv r$ とせよ.

$|z-z_0|<|a-z_0|$ の場合は, $(z-z_0)/(a-z_0)$ を,

$|z-z_0|>|a-z_0|$ の場合は, $(a-z_0)/(z-z_0)$ を**公比** r と考え

等比級数の式 $\frac{1}{1 \pm r}$ のどちらかを適用するべく
式を変形する.

展開中心が特異点の場合は, テーラー展開できないが,
等比級数で展開すると自動的にローラン展開が求まる.

まとめ：本日の確認事項

- 複素数の数列,級数とは何か説明できる
- 級数の収束性を判定できる
- べき級数の収束半径を求めることができる
- テーラー展開式を導出できる
- マクローリン展開とテーラー展開の違いを説明できる
- 複素関数を任意の点を中心にテーラー展開できる
- 代表的な複素関数のべき級数表示が書ける
- 等比級数のべき級数表示を使って複素関数のテーラー展開ができる
- ローラン展開の導出を理解している
- 複素関数をローラン展開できる

Appendix 1

ダランベールの公式の導出

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

導出) 級数 $\sum a_n(z-z_0)^n$ の隣同士の項($n+1$ 番目と n 番目の項)の比の, $n \rightarrow \infty$ の極限を考える.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z-z_0| \equiv A |z-z_0|$$

ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = A$ のように収束すると仮定する.

ダランベールの公式の導出

この時, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \equiv \xi_n$ なる数列 ξ_n を考えると,

数列の収束の定義 から, 以下を満足するような正の整数 N が必ず存在する. すなわち, どんなに小さな正の数 ε を仮定しても, $n \geq N$ を満たすすべての n に対して

$$0 < |\xi_n - A| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - A \right| < \varepsilon$$

ここで, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < A$ の場合を考えると, 一番外側の絶対値をはずして

条件分岐: 1

$$0 < A - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \varepsilon$$

ここで, 両辺に $|z - z_0|$ を乗ずると

ダランベールの公式の導出

$$0 < A|z - z_0| - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z - z_0| < \varepsilon |z - z_0| \quad \text{全辺に } |a_{n+1}/a_n||z-z_0| \text{ を加えると}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z - z_0| < A|z - z_0| < \varepsilon |z - z_0| + \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z - z_0|$$

ここで, $|z - z_0| < 1/A$ の場合, すなわち $A|z - z_0| < 1$ の場合を考えると, $\varepsilon (> 0)$ によらず, 常に

条件分岐: 2

$$\Leftrightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z - z_0| < A|z - z_0| < 1$$

よって, $n \geq N$ を満たすすべての整数 n に対して常に

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z - z_0| < r < 1 \quad \text{なる正の実数 } r \text{ をとることができる.}$$

ダランベールの公式の導出

条件分岐: 1 で $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < A$ と仮定したが, 大小関係が逆転していた場合を考察しておこう.

すなわち $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > A$ の場合は, $0 < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - A \right| < \varepsilon$ が

$$\Leftrightarrow 0 < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - A \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad A < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon + A$$

先ほどと引き算が逆 となるので辺々に A を加えて

ここで, 全辺に $|z - z_0|$ を乗ずると

$$\Leftrightarrow A|z - z_0| < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z - z_0| < \varepsilon |z - z_0| + A|z - z_0|$$

条件分岐: 2 より $A|z - z_0| < 1$ と仮定したので, 例えば $\varepsilon \equiv \frac{1 - A|z - z_0|}{2|z - z_0|}$ などと定義すれば最右辺は $(1 + A|z - z_0|)/2 < 1$ とできる.

ダランベールの公式の導出

つまり ε はいくらでも0に近い値を選ぶことができるので、

$A|z-z_0|$ と 1 の間の差＝「すき間」に、 $\varepsilon|z-z_0|$ が入るような ε を選ぶことが常に可能.

よって、**条件分岐1**の大小関係に関わらず、常に

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z - z_0| < r < 1$$

となる定数 r を取ることができる.

(結果的には条件分岐1は不要だった, ということになる.)

(一方, 条件分岐2は級数の収束にとって本質的な境界になっていることが後でわかる.)

それでは導出の本筋に戻ろう.

ダランベールの公式の導出

ここであらためて、最初に考えた $n+1$ 番目の項と n 番目の項の比を見てみると、

$$\left| \frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z-z_0| < r < 1 \quad \text{となる定数} r \text{を取れることが分かったので,}$$

$$\Leftrightarrow \left| a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} \right| < r \left| a_n(z-z_0)^n \right|$$

この不等式を $n+2$ 項目に適用すると、

$$\left| a_{n+2}(z-z_0)^{n+2} \right| < r \left| a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} \right| < r^2 \left| a_n(z-z_0)^n \right|$$

ダランベールの公式の導出

よって m 回適用すると,

$$\left| a_{n+m} (z - z_0)^{n+m} \right| < r^m \left| a_n (z - z_0)^n \right| \quad \dots \quad (\star)$$

ここで, 級数を N 番目の項を境に分離する. すなわち,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n (z - z_0)^n \right| = \sum_{n=1}^{N-1} \left| a_n (z - z_0)^n \right| + \sum_{n=N}^{\infty} \left| a_n (z - z_0)^n \right|$$

第 2 項を取り出して $(\star)$ 式を適用すると,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left| a_n (z - z_0)^n \right| < \sum_{n=N}^{\infty} \left| a_N (z - z_0)^N \right| r^{n-N} \leq \left| a_N (z - z_0)^N \right| \cdot \frac{1}{1-r}$$

↓
公比 r の等比級数になっている!

よって級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n (z - z_0)^n \right|$ は, 絶対収束する.

よって級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ は, 収束する.

ダランベールの公式の導出

最初に仮定した $A|z-z_0| < r < 1$ となる実定数 r は, 1 に限りなく近い値をとれるので, 結果的に収束半径 R は,

$$R \equiv |z-z_0| < 1/A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

もしも**条件分岐2**で仮定した $A|z-z_0| < 1$ が成り立たなかったとすると, すなわち, $A|z-z_0| \geq 1$ だった場合どうなるかを次に確かめる.

ダランベールの公式の導出

条件分岐: 2 のもう一方の場合を検証する. すなわち,

$$A|z-z_0| \geq 1 \Leftrightarrow |z-z_0| \geq 1/A \text{ の場合}$$

級数 $\sum a_n(z-z_0)^n$ の隣同士の項($n+1$ 番目と n 番目の項)の比の, $n \rightarrow \infty$ の極限は,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z-z_0| \equiv A |z-z_0| \geq 1$$

収束はするが,
極限値が1以上

すなわち, $n=M$ 項目以降の全ての項で, すなわち $n \geq M$ で上の式が成り立つような整数 M が必ず存在する. すると,

$$\left| \frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n} \right| \geq 1$$

$$\Leftrightarrow |a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}| \geq |a_n(z-z_0)^n|$$

$$\text{よって } |a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}| \geq |a_n(z-z_0)^n| \geq |a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}| \geq \dots \geq |a_M(z-z_0)^M|$$

ダランベールの公式の導出

いま, $A|z-z_0| \geq 1$ の場合を考えているから

$$|a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}| \geq |a_n(z-z_0)^n| \geq |a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}| \geq \dots \geq |a_M(z-z_0)^M| > 0$$

と考えてよい. 従って,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z-z_0)^n = 0$$

とはなり得ないから, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ は収束しない.

従って, $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ で表される $R(=|z-z_0|)$ は収束するかしないかの境界になっているので収束半径であるといえる.

以上より, ダランベールの公式が導出された. 

Appendix 2

コーシー・アダマールの公式の導出

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

導出) $n \rightarrow \infty$ における級数の項 $a_n(z-z_0)^n$ の $1/n$ 乗の絶対値の極限を考える.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(a_n (z - z_0)^n \right)^{1/n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (a_n)^{1/n} \right| |z - z_0| \equiv A |z - z_0|$$

ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A$ のように収束すると仮定する.

コーシー・アダマールの公式の導出

この $A|z-z_0|$ が1より大きいかわ小さいかが重要な分かれ道になるので、次のように場合分けして考える。まずは $A|z-z_0|<1$ 、すなわち、

$|z-z_0|<1/A$ の場合 条件分岐: 1

数列の収束 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[n]{a_n} \right| = A$ の定義により

$n \geq N$ のすべての n について、どんなに小さい正実数 ε を選んでも、次の関係式を満たす N が存在する。

$$0 < \left| \left| \sqrt[n]{a_n} \right| - A \right| < \varepsilon$$

コーシー・アダマールの公式の導出

条件分岐: 2 $\left| \sqrt[n]{a_n} \right| - A > 0$ の場合, (極限值に上から近づいてくる場合)

$$0 < \left| \sqrt[n]{a_n} \right| - A < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \overset{\text{全辺に} A \text{を加えて}}{A < \left| \sqrt[n]{a_n} \right| < \varepsilon + A}$$

全辺に $|z - z_0|$ を乗じて

$$\Leftrightarrow A|z - z_0| < \left| \sqrt[n]{a_n} \right| |z - z_0| < \varepsilon |z - z_0| + A|z - z_0|$$

条件分岐1により, $A|z - z_0| < 1$ であるから, $\varepsilon|z - z_0|$ が, 1 と $A|z - z_0|$ の差よりも小さくなるように ε を選べば, 例外なく必ず $\varepsilon|z - z_0| + A|z - z_0| < 1$ にできる.

$$\Leftrightarrow A|z - z_0| < \left| \sqrt[n]{a_n} \right| |z - z_0| < 1$$

コーシー・アダマールの公式の導出

以上から, $n \geq N$ なるすべての n について

$$\left| \sqrt[n]{a_n} \right| |z - z_0| < r < 1$$

を満たす(1より小さい)正の実数 r を選ぶことが常に可能である.

整数べき乗は正の実数に対して単調増加だから,
上の不等式を, 全辺 n 乗しても不等号は保存されて

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt[n]{a_n} \right|^n |z - z_0|^n < r^n < 1$$

$$\Leftrightarrow |a_n| |z - z_0|^n < r^n < 1$$

上の関係が, $n \geq N$ なるすべての n について成り立っている.
($n < N$ については保証されない) よって, 級数を $n=N$ で分割する⁸²

コーシー・アダマールの公式の導出

すなわち,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| |z - z_0|^n = \sum_{n=0}^{N-1} \|a_n\| |z - z_0|^n + \sum_{n=N}^{\infty} \|a_n\| |z - z_0|^n$$

右辺第1項は, 有限項の和だから有界. また,

右辺第2項は無限項の和だが, 先に求めた不等式が保証されるので適用すると

$$\sum_{n=N}^{\infty} \|a_n\| |z - z_0|^n < \sum_{n=N}^{\infty} r^n = r^N \frac{1}{1-r} \quad \text{ただし, 初項 } r^N, \text{ 公比 } r \text{ の等比級数の公式を用いた.}$$

よって, $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| |z - z_0|^n$ は絶対収束するので,

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ は収束する.

コーシー・アダマールの公式の導出

条件分岐: 2 $\left| \sqrt[n]{a_n} \right| - A < 0$ の場合, (極限值に下から近づいてくる場合)

$$0 < A - \left| \sqrt[n]{a_n} \right| < \varepsilon \quad \xLeftrightarrow{\text{全辺に } \left| \sqrt[n]{a_n} \right| \text{ を加えて}} \left| \sqrt[n]{a_n} \right| < A < \varepsilon + \left| \sqrt[n]{a_n} \right|$$

全辺に $|z - z_0|$ を乗じて

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt[n]{a_n} \right| |z - z_0| < A |z - z_0| < \varepsilon |z - z_0| + \left| \sqrt[n]{a_n} \right| |z - z_0|$$

条件分岐1により, $A |z - z_0| < 1$ であるから, ε とは無関係に,

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt[n]{a_n} \right| |z - z_0| < A |z - z_0| < 1 \quad \text{が結論できる.}$$

後の議論は全く同様.

コーシー・アダマールの公式の導出

条件分岐: 1 のもう一方の場合について調べる. すなわち,

$|z - z_0| \geq 1/A$ の場合

数列の収束 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[n]{a_n} \right| = A$ の定義により

$n \geq N$ のすべての n について, どんなに小さい正実数 ε を選んでも, 次の関係式を満たす N が存在する.

$$0 < \left| \left| \sqrt[n]{a_n} \right| - A \right| < \varepsilon$$

一番外側の絶対値の内側の正負で場合分けする

コーシー・アダマールの公式の導出

条件分岐: 2 $\left| \sqrt[n]{a_n} \right| - A > 0$ の場合, (極限值に上から近づいてくる場合)

前ページの極限の定義から絶対値をはずして

全辺にAを加えて

$$0 < \left| \sqrt[n]{a_n} \right| - A < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad A < \left| \sqrt[n]{a_n} \right| < \varepsilon + A$$

全辺に $|z-z_0|$ を乗じて

$$\Leftrightarrow A|z - z_0| < \left| \sqrt[n]{a_n} \right| |z - z_0| < \varepsilon |z - z_0| + A|z - z_0|$$

ここまでの議論は条件分岐1によらず全く同じ

ここで, **条件分岐1**により, $A|z-z_0| \geq 1$ であるから, 例外なく必ず.

$$\Leftrightarrow 1 \leq A|z - z_0| < \left| \sqrt[n]{a_n} \right| |z - z_0|$$

1以上になってしまった

コーシー・アダマールの公式の導出

一方,

条件分岐: 2 $\left| \sqrt[n]{a_n} \right| - A < 0$ の場合, (極限值に下から近づいてくる場合)

前々ページの極限の定義から絶対値をはずして

全辺に $\left| \sqrt[n]{a_n} \right|$ を加えて

$$0 < A - \left| \sqrt[n]{a_n} \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left| \sqrt[n]{a_n} \right| < A < \varepsilon + \left| \sqrt[n]{a_n} \right|$$

全辺に $|z - z_0|$ を乗じて

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt[n]{a_n} \right| |z - z_0| < A |z - z_0| < \varepsilon |z - z_0| + \left| \sqrt[n]{a_n} \right| |z - z_0|$$

条件分岐1により, $A |z - z_0| \geq 1$ であるから,

$$\Leftrightarrow 1 \leq A |z - z_0| < \varepsilon |z - z_0| + \left| \sqrt[n]{a_n} \right| |z - z_0|$$

どんな小さな ε を選んでも, $n \geq N$ に対して上の式が成り立つ N が存在することから

$$\Leftrightarrow 1 \leq \left| \sqrt[n]{a_n} \right| |z - z_0| \quad \text{が結論される.}$$

コーシー・アダマールの公式の導出

以上から、**条件分岐2**の条件によらず、 $n \geq N$ なるすべての n について

$$1 \leq \left| \sqrt[n]{a_n} \right| |z - z_0|$$

整数べき乗は正の実数に対して単調増加だから、上の不等式を、両辺 n 乗しても不等号は保存されて

$$\Leftrightarrow 1 \leq \left| \sqrt[n]{a_n} \right|^n |z - z_0|^n$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq |a_n| |z - z_0|^n$$

以上から、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| |z - z_0|^n = 0$ にはなり得ないので、

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ は収束しない。

コーシー・アダマールの公式の導出

従って, $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ で表される $R(=|z-z_0|)$ は,

半径 R の円の内側か外側かによって収束するかしないかの境界になっているので, 収束半径であるといえる.

以上より, コーシー・アダマールの公式が導出された. 