解析学　理解度の確認（１）解答例

問題 1.　複素数 z に関する以下の問いに答えよ．ただし，$\bar{z}$ は z の共役複素数を表す．

(1)　$\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$　を示せ．　（配点：５点）

(解答例)

$z = x+iy,\ \bar{z} = x-iy$ とおくと，$\dfrac{z+\bar{z}}{2} = \dfrac{(x+iy)+(x-iy)}{2} = \dfrac{2x}{2} = x = \mathrm{Re}\, z$　(了

(2)　$z\cdot\bar{z} = |z|^2$ を示せ．　（配点：５点）

(解答例)

$z = x+iy,\ \bar{z} = x-iy$　とおくと，$z\cdot\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+ixy-ixy+y^2 = x^2+y^2 = |z|^2$　(了

(3)　$\mathrm{Re}\, z \le |z|$　を示せ．　（配点：６点）

(解答例)

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \ge \sqrt{x^2} = |x|$　（$\because y^2 \ge 0$）　ここで，$x<0$ の場合は，$|z|\geqq 0$ より必ず $|z| \ge x$ が成立．

一方，$x\geqq 0$ の場合は $|x|=x$ なので絶対値が外れて　$|z| \ge |x| = x$　(了

(4)　任意の複素数 z_1, z_2 について，$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$　が成り立つことを示せ．　（配点：６点）

(解答例)

$z_1 = x_1+iy_1,\ z_2 = x_2+iy_2$　とおくと，

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)} = \overline{x_1x_2-y_1y_2+i(y_1x_2-ix_1y_2)} = x_1x_2-y_1y_2-i(y_1x_2-ix_1y_2)$$
$$= x_1(x_2-iy_2)-iy_1(x_2-iy_2) = (x_1-iy_1)(x_2-iy_2) = \bar{z}_1\bar{z}_2$$

(了

(5)　任意の複素数 z_1, z_2 について，不等式 $|z_1-z_2| \ge |z_1|-|z_2|$ が成り立つことを示せ．

ただし必要なら(1)～(4)を使ってよい．　（配点：８点）

(解答例)

$z_1 = x_1+iy_1,\ z_2 = x_2+iy_2$　とおくと，

$$|z_1-z_2|^2 = (z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)} = (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) = z_1\overline{z_1}-\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_2}$$
$$= |z_1|^2+|z_2|^2-2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \ge |z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2| = (|z_1|-|z_2|)^2$$

$\because$(2)　　$\because$(1)　　$\because$(3)

よって，$|z_1|-|z_2|$ の符号が正負いずれの場合でも，$|z_1-z_2| \ge |z_1|-|z_2|$ が成り立つ．　(了

問題 2.

(1) 偏角の範囲を $0 \leqq \theta < 2\pi$ として，複素数 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ を極形式で表せ．（配点：５点）

(解答例)

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2}(-i) = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}$$ (答)

（先頭に負号がついて偏角 $\pi/2$ だったら－２点，複素数として間違っていたら０点．）

(2) 複素数 $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{i}{4}\right)^{25}$ を，$x+iy$ 形式で示せ．(実数の指数乗はそのまま残してよい)

（配点：１０点）

(解答例)

$$\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$ （偏角の範囲 $0 \leqq \theta < 2\pi$ の場合）

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}\right)^{25} = \frac{1}{2^{25}}\left(\cos\frac{11\times 25}{6}\pi + i\sin\frac{11\times 25}{6}\pi\right) = \frac{1}{2^{25}}\left(\cos\frac{275}{6}\pi + i\sin\frac{275}{6}\pi\right)$$

$$= \frac{1}{2^{25}}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right) = \frac{1}{2^{25}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \underline{\frac{1}{2^{26}}\left(\sqrt{3} - i\right)}$$ （極形式でも正解．$-\pi/6$ でも可） (答)

(3) $z = -2\sqrt{3} - 2i$ の 4 乗根を，偏角の範囲 $0 \leqq \theta < 2\pi$ で求め，式で示せ．また，複素平面上におよその位置を図示せよ．（配点：１５点＝式８点＋図７点）

(解答例)

$$z = -2\sqrt{3} - 2i = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 4\left\{\cos\left(\frac{7\pi}{6} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6} + 2n\pi\right)\right\}$$

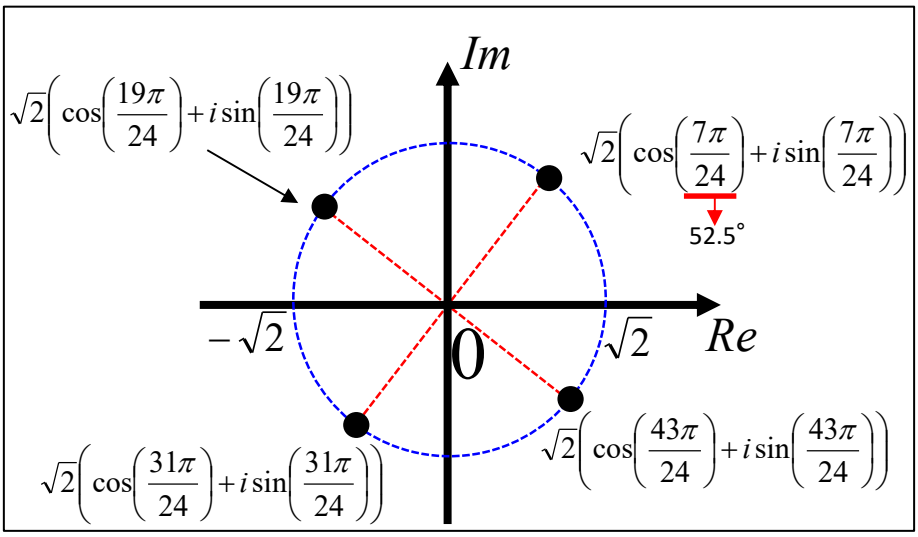
したがって４乗根は

$$\sqrt[4]{z} = 4^{\frac{1}{4}}\left\{\cos\left(\frac{7\pi}{24} + \frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{24} + \frac{n\pi}{2}\right)\right\}$$ ただし，n=0,1,2,3

よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ で表すと，（上記と同じことだが）

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{7}{24} + \frac{n}{2}\right)\pi + i\sin\left(\frac{7}{24} + \frac{n}{2}\right)\pi\right\}$$ ただし，n=0,1,2,3 (答)

図示すると下図．



問題 3.

(1) $\cos z = i$ を満たす複素数 z を求めよ．（配点：１０点）

(解答例)

方程式に $\cos z$ の定義を代入して，$\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = i$

$\Leftrightarrow \quad e^{2iz} - 2ie^{iz} + 1 = 0$

e^{iz} に関する 2 次方程式と見なして，解と係数の関係から

$e^{iz} = i \pm \sqrt{-1-1} = i \pm \sqrt{-2} = i(1 \pm \sqrt{2})$ ・・・(☆)　符号が正の場合は，

$e^{iz} = i(1+\sqrt{2}) = e^{\log(1+\sqrt{2})} e^{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}$．両辺の指数を比較すると z を得る．この場合は

$z = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi - i\log(\sqrt{2}+1)$

(☆)式で，符号が負の場合は $e^{iz} = -i(\sqrt{2}-1) = e^{\log(\sqrt{2}-1)} e^{i(-\frac{\pi}{2}+2n\pi)}$．両辺の指数を比較して z を得る．２つの解をまとめて

$z = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi - i\log(\sqrt{2} \pm 1)$　（複合同順）　(答)

上の式と等価な式なので，次の表記でも正解.

$z = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi + i\log(\sqrt{2} \mp 1)$　（複合同順）　(答)

(2)　$\log i$ の値を $x+iy$ 形式で示せ．（配点：５点）

i を指数形式で表すと，$i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}$ となる．

複素数の対数（ log ）の定義により，この指数部分が $\log i$ に等しいから，

$\log i = i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$　ただし，n=0,±1,±2,….　(答)

（実部＝０を明示してもしなくても正解とする）

(3) $\overline{(\log z)} = \log \bar{z}$ を導出せよ．なお，$z = re^{i\theta}$ のとき，$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$ (n は整数)である．（配点：７点）

(解答例)

$\overline{\log z} = \overline{\{\log r + i(\theta + 2n\pi)\}} = \log r - i(\theta + 2n\pi)$　ただし，n=0,±1,±2,….　（☆）

一方，$\log \bar{z} = \log\left(\overline{re^{i\theta}}\right) = \log\left(re^{-i\theta}\right) = \log r + i((-\theta) + 2m\pi) = \log r - i(\theta - 2m\pi)$ (※)

ただし，m=0,±1,±2,….. ここで，整数値 n, m はお互い無関係に決めることができるので，$m = -n$ と対応させれば，上の式(☆)と式(※)は同一の数の集合を表している．

よって，$\overline{(\log z)}$ が多価関数として取り得る全ての値に対して,それと等しい $\log \bar{z}$ の値が存在する，という意味で，$\overline{(\log z)} = \log \bar{z}$ が成り立つといえる．(多価関数同士の等号はこのような意味で定義されている．)

(4) 関数 $\sin(iz)$ が正則かを調べ，正則な場合は導関数 $f'(z)\left(= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ を <u>z の関数</u>として式で示せ．ただし，$f(z) = u + iv$，$z = x + iy$ とする．（配点：８点＝４点＋導関数４点）

(解答例)

$\sin z$ の定義式より，

$$\sin(iz) = \frac{e^{i\cdot iz} - e^{-i\cdot iz}}{2i} = \frac{1}{2i}(e^{-z} - e^{z}) = i\cdot\sinh z = \frac{i}{2}(e^{x}e^{iy} - e^{-x}e^{-iy})$$

$$= \frac{1}{2}\left\{e^{x}(i\cos y - \sin y) - e^{-x}(i\cos y + \sin y)\right\}$$

$$= \frac{i}{2}\cos y(e^{x} - e^{-x}) - \frac{1}{2}\sin y(e^{x} + e^{-x})$$

以上より，$u = -\frac{1}{2}\sin y(e^{x} + e^{-x})$，$v = \frac{1}{2}\cos y(e^{x} - e^{-x})$ ．

コーシー･リーマン（C.R.）方程式の左辺，右辺をそれぞれ計算すると，

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}\sin y(e^x-e^{-x})$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{2}\sin y(e^x-e^{-x})$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}\cos y(e^x+e^{-x})$,

$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}\cos y(e^x+e^{-x})$ より，成り立っているので正則である．

導関数は $\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}\left\{-\sin y(e^x-e^{-x})+i\cos y(e^x+e^{-x})\right\}$

$$=\frac{i}{2}\left\{e^x(\cos y+i\sin y)+e^{-x}(\cos y-i\sin y)\right\}=\frac{i}{2}\left\{e^x e^{iy}+e^{-x}e^{-iy}\right\}=i\frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

$=\underline{i\cdot\cosh z}$ (答)

(cosh にしなくても e^z のままで正解)

(5) 関数 $u=x^2-y^2-y$ が調和関数かを調べ，調和関数の場合は u を実部とする正則関数 $f(z)$ を求めよ．なお，$f=u+iv$ としたとき，調和関数 u に対して $v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy+c(x)$ である．

（配点：１０点＝５点＋$f(z)$５点）

(解答例)

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y-1$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$ よって，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ なので u は調和関数.

正則関数の虚部 v を求める公式から $v=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy=2xy+c(x)$ ・・・・(★)

ここで最初に求めた $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y-1$ と，C.R.方程式 $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ より，右辺同士を等しいと置いて，$-\frac{\partial v}{\partial x}=-2y-1 \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=2y+1$．これと，上の(★)式を x で偏微分した式 $\frac{\partial v}{\partial x}=2y+c'(x)$ とを比較すると，$c'(x)=1 \Leftrightarrow c(x)=x+k$ (実定数)．よって，(★)式に代入すると，$v=2xy+x+k$．　以上を $f=u+iv$ へ代入し，さらに z による表式に変形すると，

$$f(z)=u+iv=x^2-y^2-y+i(2xy+x+k)=(x+iy)^2+i(x+iy)+ik$$

$=\underline{z^2+iz+ik}$ (答)

(z の関数で表されていないと減点．また，最後の項 ik をあらためて別の定数 k' などに定義しなおしても正解とする．)