解析学 理解度の確認 (1)

すべての答案用紙に学籍番号、氏名、問題番号を明記。裏面も使用可。

問題 1. 複素数 z に関する以下の問いに答えよ。ただし、 $\bar{z}$ は z の共役複素数を表す。

- (1) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ を示せ。 (2) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ を示せ。 (3) $\operatorname{Re} z \leq |z|$ を示せ。
- (4) 任意の複素数 z_1, z_2 について、 $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ が成り立つことを示せ。
- (5) 任意の複素数 z_1, z_2 について、不等式 $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ が成り立つことを示せ。
ただし必要なら(1)~(4)を使ってよい。

問題 2.

- (1) 偏角の範囲を $0 \leq \theta < 2\pi$ とし、複素数 $-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ を極形式で表せ。
- (2) 複素数 $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}\right)^{25}$ を、 $x+iy$ 形式で示せ。(実数の指数乗はそのまま残してよい)
- (3) $z = -2\sqrt{3} - 2i$ の 4 乗根を、偏角の範囲 $0 \leq \theta < 2\pi$ で求め、式で示せ。また、複素平面上におよその位置を図示せよ。

問題 3.

- (1) $\cos z = i$ を満たす複素数 z を求めよ。 (2) $\log i$ の値を $x+iy$ 形式で示せ。
- (3) $\overline{(\log z)} = \log \bar{z}$ を導出せよ。なお、 $z = re^{i\theta}$ のとき、 $\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$ (n は整数)である。
- (4) 関数 $\sin(iz)$ が正則かを調べ、正則な場合は導関数 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ を z の関数として式で示せ。ただし、 $f(z) = u + iv$ 、 $z = x + iy$ とする。
- (5) 関数 $u = x^2 - y^2 - y$ が調和関数かを調べ、調和関数の場合は u を実部とする正則関数 $f(z)$ を求めよ。なお、 $f = u + iv$ としたとき、調和関数 u に対して $v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + c(x)$ である。