解析学演習　微分方程式(第 7 回)　　2017/6/01

・答案用紙に解答を記入すること。答えだけでなく導出も書くこと。裏を使ってよい。
・答案用紙に学籍番号と氏名を記載すること。

1.　以下の連立常微分方程式を解くことを考える。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + 2y, \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x + y \qquad \text{(b)}$$

(1) 式(a) – (b)の一般解をうるべく，以下の文章の空欄 $A$ – $G$ を適切な数式・行列・ベクトル等で埋めよ。

「式(a) – (b)の連立常微分方程式を，2 行 2 列の行列( $A$ )でベクトル表示すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}$$

である。行列( $A$ )の固有値$\lambda$は固有方程式 $\det(A - \lambda I_2) = 0$ から求められる（ただし $I_2$ は 2 × 2 の単位行列）。これより，$\lambda$の従う 2 次方程式を( $B$ ) = 0 と得ることができる。これを解くと，異なる２つの実固有値$\lambda_1, \lambda_2$として（ただし$\lambda_1 > \lambda_2$とする），$\lambda_1 = ($ $C$ $)$, $\lambda_2 = ($ $D$ $)$ を得ることができる。固有値$\lambda_1, \lambda_2$に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ とすると，$\boldsymbol{q}_1 = ($ $E$ $)$, $\boldsymbol{q}_2 = ($ $F$ $)$ （ただし $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$ の規格化は不要）である。よって任意定数 $C_1, C_2$ を用いる事により，式(a) – (b)の一般解を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} G \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} H \end{pmatrix} \qquad \text{(d)}$$

と得ることができる。」

2. 位置 $x$, 時刻 $t$ が満たす波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{(e)}$$

の一般解を以下の手順で求めることを考える。ただし、$A \neq 0$ とする。

(1) 波動方程式(e)において、２つの独立変数 $v = x - At$, $w = x + At$ を新たに導入すると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w} = 0 \qquad \text{(f)}$$

となることを示せ。

(2) この偏微分方程式を解くと、ダランベールの解

$$u = c_1\left(x - At\right) + c_2\left(x + At\right) \qquad \text{(g)}$$

が得られることを示せ。ここに $c_1(v)$, $c_2(w)$は、それぞれ $v$, $w$ の任意関数である。