平成 29 年度　解析学　赤塚担当分　試験　解答例　　2017/06/05

1(a) 特性方程式は $\lambda^2+\lambda-2=0$, すなわち $(\lambda+2)(\lambda-1)=0$. これを解くと、$\lambda=-2,1$ となる。よって、対応する斉次の一般解は $y=C_1\exp(-2x)+C_2\exp(x)$ となる。

次に、非斉次の特殊解を $y=A\exp(-x)$ と仮定して与式に代入すると $(A-A-2A)\exp(-x)\equiv\exp(-x)$ すなわち $-2A\exp(-x)\equiv\exp(-x)$ となるので、$A=-1/2$ となる。よって、非斉次特殊解の 1 つとして $(-1/2)\exp(-x)$ を上げることができる。

よって非斉次の一般解は

$$y=C_1\exp(-2x)+C_2\exp(x)-\frac{1}{2}\exp(-x)$$

となる。

(b) 特性方程式は $\lambda^2-2\lambda+1=0$, すなわち $(\lambda-1)^2=0$. これを解くと、$\lambda=1$(重解) となる。よって、対応する斉次の一般解は $y=C_1x\exp(x)+C_2\exp(x)$ となる。

次に、非斉次の特殊解を $y=A\exp(-x)$ と仮定して与式に代入すると $(A+2A+A)\exp(-x)\equiv\exp(-x)$ すなわち $4A\exp(-x)\equiv\exp(-x)$ となるので、$A=1/4$ となる。よって、非斉次特殊解の 1 つとして $(1/4)\exp(-x)$ を上げることができる。

よって非斉次の一般解は

$$y=C_1x\exp(x)+C_2\exp(x)+\frac{1}{4}\exp(-x)$$

となる。

(c) 対応する斉次の一般解は前問と同一なので $y=C_1x\exp(x)+C_2\exp(x)$ となる。次に、非斉次の特殊解を $y=Ax^3\exp(x)$ と仮定して与式に代入すると $y'=3Ax^2\exp(x)+Ax^3\exp(x)$, $y''=6Ax\exp(x)+6Ax^2\exp(x)+Ax^3\exp(x)$ となり、これらを与式に代入すると $y''-2y'+y=(6Ax+6Ax^2+Ax^3-6Ax^2-2Ax^3+Ax^3)\exp(x)=6Ax\exp(x)\equiv x\exp(x)$ となるので、$A=1/6$ となる。よって、非斉次特殊解の 1 つとして $(1/6)x^3\exp(x)$ を上げることができる。

よって非斉次の一般解は

$$y=C_1x\exp(x)+C_2\exp(x)+\frac{1}{6}x^3\exp(x)$$

となる。

2(a)

A: $\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$　B: $(\lambda+2)^2$　C: -2　D: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$　E: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$　F: $\exp(-2t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

G: $t\exp(-2t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\exp(-2t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ または $\exp(-2t)\begin{pmatrix}t\\t+1\end{pmatrix}$

(b) 与式で $\mathrm{d}/\mathrm{d}t\equiv 0$ とおき、

$$\begin{cases}3x_0-y_0=1\\ x_0+y_0=1\end{cases}$$

を解けば $(x_0,y_0)=(1/2,1/2)$ を得る。これが非斉次の特殊解の一つである。

(c) 非斉次の一般解は、斉次の一般解と非斉次の特殊解の和で与えられるから、求め得る一般解は

$$x = C_1 \exp(-2t) + C_2 t \exp(-2t) + \frac{1}{2}, \tag{1}$$

$$y = C_1 \exp(-2t) + C_2 (t+1) \exp(-2t) + \frac{1}{2} \tag{2}$$

となる。

(d) まず、

$$\lim_{t\to\infty} \exp(-2t) = 0 \tag{3}$$

は明らか。また、l'Hospital の定理から

$$\lim_{t\to\infty} t\exp(-2t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{\exp(2t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\exp(2t)} = 0 \tag{4}$$

も言える。(3)-(4) を (1)-(2) に適用すると

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{1}{2} \tag{5}$$

は明らかである。

3 (a) コンデンサ両端の電圧を V とすると、題意により

$$V = \frac{q}{C} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \tag{6}$$

また、コンデンサに蓄えられる電荷が q なので、電流 I との関係式は

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, \tag{7}$$

となる。(6)-(7) から i を消去すると

$$\frac{q}{C} + L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} = 0, \tag{8}$$

すなわち、

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC} q = 0 \tag{9}$$

を電荷 q に関する方程式として得る。

(b) (9) の特性方程式は $\lambda^2 + 1/(LC) = 0$ より、その根は $\lambda = \pm j/\sqrt{LC}$ となる。したがって (9) の一般解は

$$q = C_1 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \tag{10}$$

となる。

(c) まず $q(0) = 0$ を (10) に代入すると $C_1 = 0$ は明らかである。次に (10) を一回微分して $t = 0$ とすると

$$\frac{\mathrm{d}q(0)}{\mathrm{d}t} = \frac{C_2}{\sqrt{LC}} \cos 0 = \frac{C_2}{\sqrt{LC}} = i_0 \tag{11}$$

であるから、$C_2 = i_0\sqrt{LC}$ を得る。

以上から、q の特殊解として

$$q = i_0\sqrt{LC}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \tag{12}$$

を得る。

以上