解析学演習　微分方程式(第 13 回)　解答例　　2017/5/29

1．(1)[1 点]　特性方程式は $\lambda^2-3\lambda+2=0$ となる。その解は $\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)=0$ より，$A_1=1,\ A_2=2$ の異なる 2 つの解になる。よって一般解は $y=C_1\exp x+C_2\exp(2x)$ となる。

(2) [1 点]　特性方程式は $\lambda^2+4\lambda+4=0$ となる。その解は $\lambda=-2$ となり，重解である。よって一般解は $y=C_1\exp(-2x)+C_2x\exp(-2x)$ となる。

2．(1) [2 点]　$p(x)=1$，$q(x)=x+1$ の場合である。よって，

$$y=\exp\left(-\int \mathrm{d}x\right)\int\left\{(x+1)\exp\left(\int \mathrm{d}x\right)\right\}+C\exp\left(-\int \mathrm{d}x\right)$$

$$=\exp(-x)\int(x+1)\exp x\,\mathrm{d}x+C\exp(-x)$$

$$=\exp(-x)\left\{(x+1)\exp x-\int\exp x\,\mathrm{d}x\right\}+C\exp(-x)$$

$$=\exp(-x)x\exp x+C\exp(-x)=x+C\exp(-x)$$

となる。よって特殊解は $y=x$ である。

(2) [2 点]　特殊解を 1 次関数 $y_\mathrm{s}=Ax+B$ とおく。ここで，A, B は定数である。$y_\mathrm{s}'=A$ と一緒に微分方程式へ代入すると，$y_\mathrm{s}'+y_\mathrm{s}=(Ax+B)+A=Ax+(A+B)=x+1$ となり，係数を比較すると $A=1, A+B=1$ が得られる。これを解くと, $A=1, B=0$ となる。すなわち, 特殊解は $y_\mathrm{s}=Ax+B=x$ となる。

3．(1) [2 点]　斉次方程式 $y''-2y'+y=0$ の 2 つの基本解は，$y_1=x\exp x$ と $y_2=\exp x$ である。ロンスキャン w は,

$$w=\begin{vmatrix} x\exp x & \exp x \\ (x+1)\exp x & \exp x \end{vmatrix}=x\exp(2x)-(x+1)\exp(2x)=-\exp(2x)$$

となる。さて、$r(x) = \exp(-x)$ であるので，

$$-y_1 \int \frac{r(x) y_2}{w} \mathrm{d}x = -x \exp x \int \frac{\exp(-x) \exp x}{-\exp(2x)} \mathrm{d}x = x \exp x \int \exp(-2x) \mathrm{d}x$$

$$= x \exp x \left\{ -\frac{1}{2} \exp(-2x) + C_1 \right\} = -\frac{1}{2} x \exp(-x) + C_1 x \exp x$$

$$y_2 \int \frac{r(x) y_1}{w} \mathrm{d}x = \exp x \int \frac{\exp(-x) x \exp x}{-\exp(2x)} \mathrm{d}x = -\exp x \int x \exp(-2x) \mathrm{d}x$$

$$= -\exp x \left\{ -\frac{1}{2} x \exp(-2x) - \frac{1}{4} \exp(-2x) + C_{20} \right\} = \frac{1}{2} x \exp(-x) + \frac{1}{4} \exp(-x) - C_{20} \exp x$$

したがって，一般解は

$$y = \left\{ -\frac{1}{2} x \exp(-x) + C_1 x \exp x \right\} + \left\{ \frac{1}{2} x \exp(-x) + \frac{1}{4} \exp(-x) - C_{20} \exp x \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \exp(-x) + C_1 x \exp x - C_{20} \exp x = \frac{1}{4} \exp(-x) + C_1 x \exp x + C_2 \exp x$$

となる。ただし、$C_2 = \quad C_{20}$ とおいた。すなわち、特殊解は $y_\mathrm{s} = \frac{1}{4} \exp(-x)$ となる。

(2) [2 点]　基本解が $x \exp x$，$\exp x$ で、非斉次項が $\exp(-x)$ であるので、特殊解を指数関数 $y_\mathrm{s} = A \exp(-x)$ とおく。ここで、A は定数である。$y_\mathrm{s}' = -A \exp(-x)$, $y_\mathrm{s}'' = A \exp(-x)$ とともに微分方程式に代入すると、$A \exp(-x) + 2A \exp(-x) + A \exp(-x) = 4A \exp(-x) = \exp(-x)$ となる。係数を比較すると、$4A = 1$ より $A = \frac{1}{4}$ となる。すなわち、特殊解は $y_\mathrm{s} = \frac{1}{4} \exp(-x)$ となる。