解析学演習　微分方程式(第 11 回)　解答例　　2017/5/22

1.　(1)[1 点]　$w(x,\exp x)=\begin{vmatrix} x & \exp x \\ 1 & \exp x \end{vmatrix}=(x-1)\exp x\neq 0$ となるので，1 次独立である。

(2)[1 点]　$w(\exp x,\exp(x+A))=\begin{vmatrix} \exp x & \exp(x+A) \\ \exp x & \exp(x+A) \end{vmatrix}=0$ となるので，1 次従属である。

2. (1) [1 点]　定常状態では直流成分のみを考えることとなる。直流回路としては、キャパシタは絶縁体に相当し、電流は流れることができない。よって。$i(\infty)=0$。

(2)[1 点]　$Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t=E$、これを両辺時間微分して $R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{i}{C}=0$. 確かに斉次になっている。

(3)[1 点]　$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{i}{C}=0$ より，$i=k'\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}$ (ただし，k' は定数)。

(4) [2 点]　$t=0$ でキャパシタ両端の電圧は 0 なので，$i(0)=E/R$。よって　$k'=E/R$.

これより $i(t)=\frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{CR}\right)$

(5) [1 点]　CR

(6) [2 点]　非斉次方程式の特殊解が定常解である。すなわち交流回路を　$v(t)=V_0\exp(j\omega t)$とおいて解き、その虚数成分を求めれば良い。(交流の定常解)。

$$I=\frac{V_0\mathrm{e}^{j\omega t}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{j\omega CV_0\mathrm{e}^{j\omega t}}{1+j\omega CR}$$

$$=\frac{j\omega C(1-j\omega CR)V_0}{1+(\omega CR)^2}\mathrm{e}^{j\omega t}=\frac{\omega C(\omega CR+j)V_0}{1+(\omega CR)^2}\mathrm{e}^{j\omega t}$$

$$=\frac{\omega CV_0}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\left(\frac{\omega CR}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}+j\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\right)\mathrm{e}^{j\omega t}$$

$$=\frac{\omega CV_0}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\mathrm{e}^{j\phi}\mathrm{e}^{j\omega t}\qquad\left(\tan\phi=\frac{1}{\omega CR}\right)$$

$$=\frac{\omega CV_0}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\mathrm{e}^{j(\omega t+\phi)}$$

ここで虚部をとって $i(t)$ が求まる。

$$i(t)=\frac{\omega CV_0}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\sin(\omega t+\phi)$$