[1]　RC 回路の解法

① 直流(DC)電源

図1に示す RC 回路を考える。初期状態ではスイッチ S は開放されており，キャパシタには電荷が蓄積されていないとする。直流電圧源の両端電圧を E とし，時刻 $t=0$ においてスイッチ S を閉じたとき，時間 t に対して回路に流れる電流 $i(t)$ を求める。

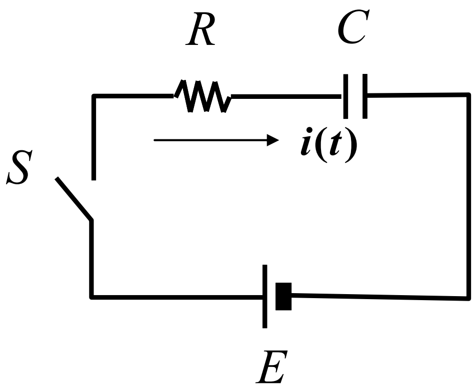


図1　RC 回路(直流電圧源)

時刻 $t=0$ 以降における回路方程式式は，電流 $i(t)$ を用いて：　$Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)\,dt=E$

両辺を t について微分すると，$t=0$ 以降は E は一定であり　$\frac{dE}{dt}=0$ だから，

$$R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=0,\ \frac{di}{dt}=-\frac{1}{CR}i,$$

$$\frac{1}{i}\frac{di}{dt}=-\frac{1}{CR},\int\frac{di}{i}=-\frac{1}{CR}\int dt$$

$$\log|i|=-\frac{t}{CR}+k\quad(k\text{は定数}),\ i=k'\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}\quad(k'=\pm\mathrm{e}^{k})$$

$t=0$ でキャパシタ両端の電圧は 0 なので，

$i(0)=\frac{E}{R}$。よって $k'=\frac{E}{R}$ より，$i(t)=\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{CR}}$　となる。

電流波形を模式的に図示すると図2のようになる。

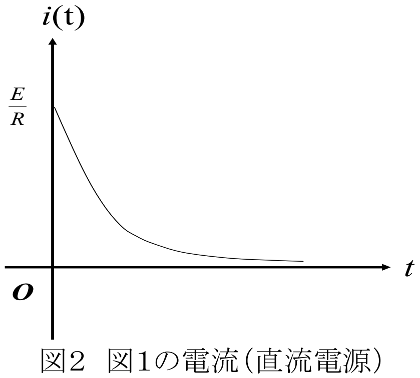


図2 図1の電流(直流電源)

② 交流(AC)電源

図3に示す回路に対して電圧の式を立てると以下の通りとなる。ただし $v(t)=V_0\cos\omega_0 t\quad(t\geq 0),\quad 0\quad(t<0)$ とおく。

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)\,dt=V_0\cos\omega_0 t$$

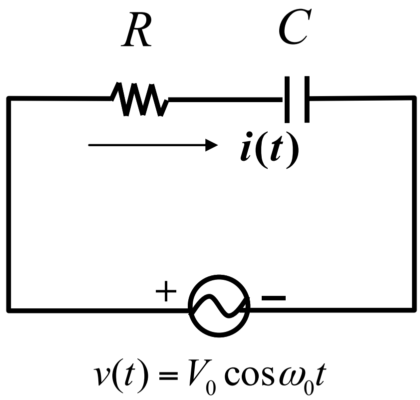


図3　RC 回路(交流電圧源)

両辺を t について微分すると，

$$R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=-\omega_0 V_0\sin\omega_0 t,$$

$$\frac{di}{dt}+\frac{i}{CR}=-\frac{\omega_0 V_0}{R}\sin\omega_0 t$$

[1]の式(1)の変数 x を t に置き換えてあてはめると

$P(t)=\frac{1}{CR}$，$Q(t)=-\frac{\omega_0 V_0}{R}\sin\omega_0 t$ なので，式(2)に代入して，

$$i(t)=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{CR}dt}\left(\int\left(-\frac{\omega_0 V_0}{R}\sin\omega_0 t\right)\mathrm{e}^{\int\frac{1}{CR}dt}\,dt+c_0\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}\left(\left(-\frac{\omega_0 V_0}{R}\right)\int\mathrm{e}^{\frac{t}{CR}}\sin\omega_0 t\,dt+c_0\right)$$

$P=\int\mathrm{e}^{\frac{t}{CR}}\sin\omega_0 t dt$ とおいて部分積分すると，

$$P=\int\mathrm{e}^{\frac{t}{CR}}\sin\omega_0 t dt$$

$$=CR\cdot\mathrm{e}^{\frac{t}{CR}}\sin\omega_0 t-CR\omega_0\int\mathrm{e}^{\frac{t}{CR}}\cos\omega_0 t dt$$

$$=CR\cdot\mathrm{e}^{\frac{t}{CR}}\sin\omega_0 t$$

$$-CR\omega_0\left(CR\cdot\mathrm{e}^{\frac{t}{CR}}\cos\omega_0 t+CR\omega_0\int\mathrm{e}^{\frac{t}{CR}}\sin\omega_0 t dt\right)$$

$$=CR\cdot\mathrm{e}^{\frac{t}{CR}}\left(-\omega_0 CR\cos\omega_0 t+\sin\omega_0 t\right)-(\omega_0 CR)^2 P$$

$$\left\{1+(\omega_0 CR)^2\right\}P$$

$$= CR\cdot e^{\frac{t}{CR}}\left(-\omega_0 CR\cos\omega_0 t+\sin\omega_0 t\right)$$

$$P = CR\cdot e^{\frac{t}{CR}}\frac{-\omega_0 CR\cos\omega_0 t+\sin\omega_0 t}{1+(\omega_0 CR)^2}$$

$$= -\frac{CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cdot$$

$$e^{\frac{t}{CR}}\left(\frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cos\omega_0 t-\frac{1}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\sin\omega_0 t\right)$$

$$= -\frac{CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cdot$$

$$e^{\frac{t}{CR}}\left(\cos\phi\cos\omega_0 t-\sin\phi\sin\omega_0 t\right)$$

$$= -\frac{CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cdot e^{\frac{t}{CR}}\cos(\omega_0 t+\phi)$$

ここで$\tan\phi = \dfrac{1}{\omega_0 CR}$，　よって，

$$i(t) = c_0 e^{-\frac{t}{CR}} + \frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cos(\omega_0 t+\phi)$$

$t = 0$において電源の電圧はV_0であり，キャパシタの蓄積電荷量が 0 なので$i(0) = \dfrac{V_0}{R}$であるから，上式に代入して，

$$c_0 = \frac{V_0}{R} - \frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cos\phi$$

$$= \frac{V_0}{R} - \frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cdot\frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}$$

$$= \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}\frac{(\omega_0 CR)^2}{1+(\omega_0 CR)^2} = \frac{V_0}{R}\frac{1}{1+(\omega_0 CR)^2}$$

$$\therefore\ i(t) = \frac{V_0}{R}\frac{1}{1+(\omega_0 CR)^2}e^{-\frac{t}{CR}}$$

$$+\frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cos(\omega_0 t+\phi)$$

③　交流回路を$v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$とおいて解く（交流の定常解）。図4。

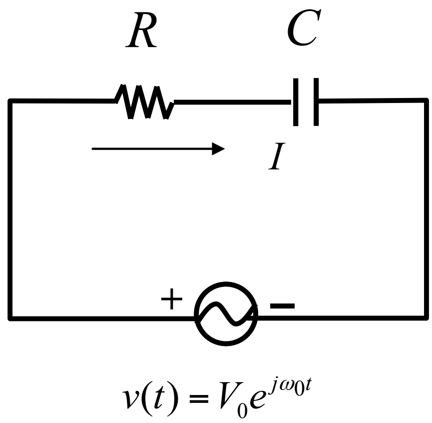


図4　RC 回路（交流電圧源）

$$I = \frac{V_o e^{j\omega_0 t}}{R+\frac{1}{j\omega_0 C}} = \frac{j\omega_0 CV_o e^{j\omega_0 t}}{1+j\omega_0 CR}$$

$$= \frac{j\omega_0 C(1-j\omega_0 CR)V_o}{1+(\omega_0 CR)^2}e^{j\omega_0 t} = \frac{\omega_0 C(\omega_0 CR+j)V_o}{1+(\omega_0 CR)^2}e^{j\omega_0 t}$$

$$= \frac{\omega_0 CV_o}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\left(\frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}+j\frac{1}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\right)e^{j\omega_0 t}$$

$$= \frac{\omega_0 CV_o}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}e^{j\phi}e^{j\omega_0 t}$$

$$\times(\tan\phi = \frac{1}{\omega_0 CR}) = \frac{\omega_0 CV_o}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}e^{j(\omega_0 t+\phi)}$$

よって実部をとって$i(t)$が求まる。

$$i(t) = \frac{\omega_0 CV_o}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cos(\omega_0 t+\phi)$$

この結果は②の定常解の項と一致する。

[2]　RL 回路の解法

①　直流（DC）電源：　図5のRC 回路を考える。初期状態ではスイッチSが開放されているとする。直流電圧源の両端電圧をEとし，時刻$t = 0$においてスイッチSを閉じたとき，時間tに対して回路に流れる電流$i(t)$を求めてみよう。時刻$t = 0$以降において，電流$i(t)$を用いて電圧に対する式をた

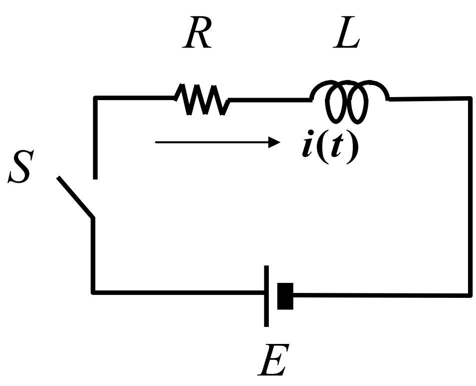


図5　RL 回路（直流電圧源）

てると以下の通りになる。

$$Ri(t)+L\frac{di}{dt}=E\,,\qquad \frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E}{L}$$

[1]の式(1)の変数 x を t に置き換えてあてはめると $P(t)=\dfrac{R}{L}$，$Q(t)=\dfrac{E}{L}$ なので，式(2)に代入して，

$$i(t)=\mathrm{e}^{-\int\frac{R}{L}dt}\left(\int\frac{E}{L}\mathrm{e}^{\int\frac{R}{L}dt}dt+c_0\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{E}{L}\int\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}dt+c_0\right)=\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{E}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}+c_0\right)=\frac{E}{R}+c_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

ここで $t=0$ においてインダクタ両端の電圧は E なので，$i(0)=0$ である。よって，

$$\frac{E}{R}+c_0=0,\ c_0=-\frac{E}{R}\quad \therefore i(t)=\frac{E}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

模式的に図示すれば図6となる。

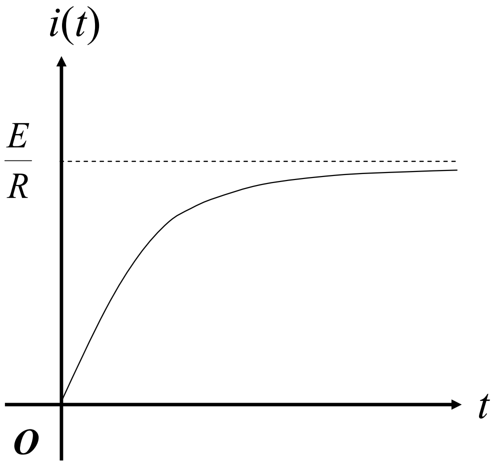
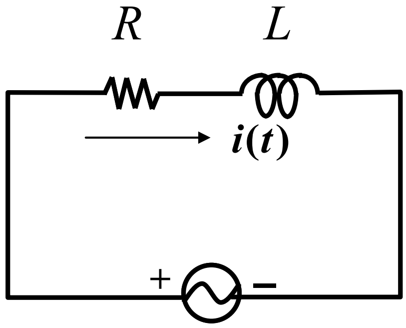


図6　図5の電流（直流電源）

② 交流（AC）電源

図7に示す回路に対して電圧の式を立てると以下の通りとなる。ただし $v(t)=V_0\cos\omega_0 t\quad (t\ge 0)$，$0\quad (t<0)$ とおく。

$$Ri(t)+L\frac{di}{dt}=V_0\cos\omega_0 t,\quad \frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{V_0}{L}\cos\omega_0 t$$



$v(t)=V_0\cos\omega_0 t$

図7　RL 回路（交流電圧源）

[1]の式(1)の変数 x を t に置き換えて，$P(t)=\dfrac{R}{L}$，$Q(t)=\dfrac{V_0}{L}\cos\omega_0 t$ なので，式(2)に代入して，

$$i(t)=\mathrm{e}^{-\int\frac{R}{L}dt}\left(\int\left(\frac{V_0}{L}\cos\omega_0 t\right)\mathrm{e}^{\int\frac{R}{L}dt}dt+c_0\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{V_0}{L}\int\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t dt+c_0\right)$$

$P=\int\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t dt$ とおいて部分積分すると，

$P=$

$$\int\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t dt=\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t+\frac{L}{R}\omega_0\int\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\sin\omega_0 t dt$$

$$=\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t$$

$$+\frac{\omega_0 L}{R}\left(\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\sin\omega_0 t-\frac{\omega_0 L}{R}\int\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t dt\right)$$

$$=\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\left(\cos\omega_0 t+\frac{\omega_0 L}{R}\sin\omega_0 t\right)-\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2 P,$$

$$\left\{1+\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2\right\}P=\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\left(\cos\omega_0 t+\frac{\omega_0 L}{R}\sin\omega_0 t\right)$$

$$\therefore P=\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\frac{\cos\omega_0 t+\dfrac{\omega_0 L}{R}\sin\omega_0 t}{1+\left(\dfrac{\omega_0 L}{R}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}\cos\omega_0 t+\frac{\frac{\omega_0 L}{R}}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}\sin\omega_0 t\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\left(\cos\phi\cos\omega_0 t+\sin\phi\sin\omega_0 t\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos(\omega_0 t-\phi)\quad(\tan\phi=\frac{\omega_0 L}{R})$$

$$\therefore i(t)=\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{V_0}{L}\int\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t dt+c_0\right)$$

$$=c_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}+\frac{V_0}{L}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}\frac{L}{R}\cos(\omega_0 t-\phi)$$

$$=c_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}+\frac{V_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}\cos(\omega_0 t-\phi)$$

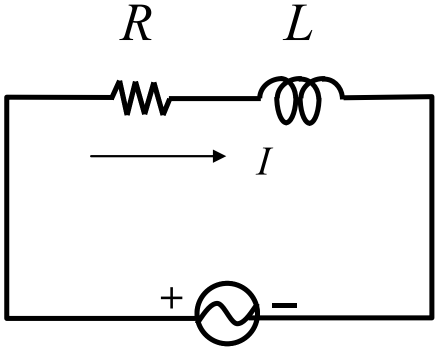
ここで$i(0)=0$なので，上式に代入して，

$$c_0=-\frac{V_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}\cos\phi$$

$$=-\frac{V_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}=-\frac{V_0}{R}\frac{1}{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}$$

$$\therefore i(t)=\frac{V_0}{R}\left[-\frac{1}{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}\cos(\omega_0 t-\phi)\right]$$

③ 交流回路を$v(t)=V_0\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$とおいて解く（交流の定常解）。図8。



$$v(t)=V_0 e^{j\omega_0 t}$$

図8 RL 回路（交流電圧源）

$$I=\frac{V_o e^{j\omega_0 t}}{R+j\omega_0 L}=\frac{V_0}{R}\frac{1}{1+\left(j\frac{\omega_0 L}{R}\right)}\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$$

$$=\frac{V_0}{R}\frac{1-\left(j\frac{\omega_0 L}{R}\right)}{1+\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$$

$$=\frac{V_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}-j\frac{\frac{\omega_0 L}{R}}{\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}-}\right)\mathrm{e}^{j\omega}$$

$$=\frac{V_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}\mathrm{e}^{-j\phi}\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$$

$$=\frac{V_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}\mathrm{e}^{j(\omega_0 t-\phi)}\quad(\tan\phi=\frac{\omega_0 L}{R})$$

よ っ て 実 部 を と っ て $i(t)$ が 求 ま る 。

$$i(t)=\frac{V_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}\cos(\omega_0 t-\phi)$$

[1]の RC 回路と比べると，位相の進み・遅れの関係が逆であることがわかる。