

1. [2 点] 対応する斉次方程式 $y' + y = 0$ の一般解は $y = C \exp(-x)$ である。定数変化法により問題の式の一般解を $y = c \exp(-x)$ とおく。 $y' = c' \exp(-x) - c \exp(-x)$ と一緒に代入すると,

$$y' + y = c' \exp(-x) - \cancel{c \exp(-x)} + \cancel{c \exp(-x)} = \exp(-x)$$

$$c' \exp(-x) = \exp(-x)$$

$$c' = 1 \quad (1 \text{ 点})$$

$$c = x + C$$

$$y = c \exp(-x) = (x + C) \exp(-x) = x \exp(-x) + C \exp(-x)$$

2. [2 点] $p(x) = 1$, $q(x) = \exp(-x)$ の場合である。よって,

$$y = \exp\left(-\int dx\right) \int \left\{ \exp(-x) \exp\left(\int dx\right) \right\} dx + C \exp\left(-\int dx\right)$$

$$= \exp(-x) \int dx + C \exp(-x)$$

$$= x \exp(-x) + C \exp(-x)$$

となる。ここで、 C は任意定数である。

3. [2 点] 与えられた問題文の式 $y' + y = \exp(-x)$ の両辺に $\exp x$ をかけると

$$\exp(x) y' + \exp(x) y = 1$$

となる。左辺は積の微分の公式を逆に使うと一つにまとめることができ、すなわち

$$\frac{d}{dx} \{ \exp(x) y \} = 1$$

となる。両辺を積分すると

$$\int \frac{d}{dx} \{ \exp(x) y \} dx = \int dx$$

すなわち $\exp(x) y = x + C$ となる。したがって、求め得る一般解は

$$y = x \exp(-x) + C \exp(-x)$$

となる。

4. [2 点] $p(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ より、 $y = C \exp\left(-\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx\right) = C \exp\left(-\sqrt{x^2 + 1}\right)$ 。

5. [2 点]

$(y')^2 + yy'' = 0$ について、例題 4.4 の方法でもできるが、煩雑である。左辺の形に留意すれば、積の微分の公式を逆に使って、直ちに

$$\frac{d}{dx} (yy') = 0$$

と変形できるから、この両辺をまず x で 1 回積分すると

$$yy' = C_{10}$$

を得る。 C_{10} は任意定数である。さらに左辺を変形すると

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} y^2 \right) = C_{10}$$

と変形できるから、さらに両辺を x で積分すると

$$\frac{1}{2} y^2 = C_{10} x + C_{20}$$

となる。 C_{20} は任意定数である。両辺を 2 倍して、 $2C_{10} = C_1$, $2C_{20} = C_2$ とおけば、一般解は

$$y^2 = C_1 x + C_2$$

となる。