

# 微分方程式

- 同次系
- 1階線形斉次方程式
- 1階線形非斉次方程式

今日のポイント:

微分方程式の種類を分類できる。

同次系・1階斉次・1階非斉次  
微分方程式に積分を適用し  
解くことができる。

# 3. 同次形

## 目標

- 同次形の意味が理解できる
- 同次形の解き方が理解できる
- $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{Ax + By + C}{Dx + Ey + F}\right)$  の形が解ける

## 3.1 同次形とは

- 1階の導関数  $y' = \frac{dy}{dx}$  が  $\frac{y}{x}$  の関数  $f\left(\frac{y}{x}\right)$  で

与えられた1階微分方程式を**同次形**という。

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3.1)$$

Homogeneous equation

## 3.2 同次形の解き方

$$\frac{y}{x} = u$$

すなわち  $y = ux$  とおく。

もちろん、 $u$ は $x$ の関数、 $u = u(x)$  である。よって

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

となることから、微分方程式(3.1)は

$$u + x \frac{du}{dx} = f(u), \quad \text{すなわち} \quad \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

この式は、 $u$ を**未知関数とする変数分離形**である。

## 3.2 同次形の解き方(続き)

$\frac{1}{f(u)-u} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$  として、両辺を  $x$  で積分すると

$$\int \frac{1}{f(u)-u} du = \int \frac{1}{x} dx + C \quad (3.2)$$

となる。これに2.2 節の変数分離形の解法を適用すれば  $u$  が求められる。それに  $x$  をかけることで微分方程式(3.1)の一般解  $y$  が求められる。

式(3.1)は1階微分方程式であるので、その一般解(3.2)は1つの任意定数  $C$  を含む。

例題3.1  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 1$  (3.3) を解く。

(解)  $\frac{y}{x} = u$  とおき、 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$  を式(3.3)に代入する。 $u + x \frac{du}{dx} = u + 1$  すなわち  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

両辺を $x$ で積分すると  $\int du = \int \frac{1}{x} dx + C$

すなわち  $u = \log|x| + C$  となる。 $C$ は任意定数である。

よって、微分方程式(3.3)の一般解 $y$ は

$$y = xu = x \log|x| + Cx$$

となる。



例題3.2  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$  を解く。

(解)  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{y}{x} - \frac{x}{y} \right)$  と変形でき、同次形である。

$\frac{y}{x} = u$  とおき、 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$  を代入すると

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \left( u - \frac{1}{u} \right) \quad \text{すなわち} \quad 2x \frac{du}{dx} = -\frac{u^2 + 1}{u}$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{2u}{u^2 + 1} \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}$$

となる。両辺を $x$ で積分すると

## 例題3.2 続き

$$\int \frac{2u}{u^2 + 1} du = -\int \frac{1}{x} dx + C_0 \quad \text{即ち}$$

$\log(u^2 + 1) = -\log|x| + C_0$  となる。左辺の対数関数の引数  $u^2 + 1$  は常に正であるため、絶対値は不要。さらに変形すると

$$\log(u^2 + 1) = -\log|x| + \log\{\exp(C_0)\} = \log \frac{\exp(C_0)}{|x|}$$

よって  $u^2 + 1 = \frac{C}{x}$  となる。ここに、 $C (= \pm \exp C_0)$

は任意定数である。

## 例題3.2 さらに続き

$\frac{y}{x} = u$  を代入して整理すると

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \frac{C}{x} \quad \text{即ち、一般解は}$$

$$y^2 = -x^2 + Cx$$

となる。

注意:  $u$ は自分で勝手においたものだから、  
必ず最後は元に戻し,  $x$ と $y$ で解答すること。



### 3.3 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{Ax + By + C}{Dx + Ey + F}\right)$ の形の解き方

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{Ax + By}{Dx + Ey}\right) \quad (3.4)$$

の形の微分方程式は、引数の分子、分母をそれぞれ  $x$  で割ると

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{Ax + B\frac{y}{x}}{Dx + E\frac{y}{x}}\right)$$

のように、同次形とみなすことができる。

### 3.3

### つづき

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{Ax + By + C}{Dx + Ey + F}\right) \quad (3.4)$$

の形の微分方程式は、 $AE - DB \neq 0$ ならば、引数の分子  $Ax + By + C$  と、分母  $Dx + Ey + F$  が同時に0となる  $x = X, y = Y$  を用いて

$$x_0 = x - X$$

$$y_0 = y - Y$$

の変数変換を行うと、

$$\frac{dy_0}{dx_0} = f\left(\frac{Ax_0 + By_0}{Dx_0 + Ey_0}\right)$$

と、式(3.4)の形に変形できる。

### 3.3 テキストの補足

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{Ax + By + C}{Dx + Ey + F}\right)$$

の形の微分方程式で、 $AE - DB = 0$ の場合には、前頁のような $X, Y$ は存在しない。

その場合は、**2.3の方法**  $\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$ の形と考えれば解くことが可能である。

演習：上記の理由を説明せよ。

例題3.3  $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y-1}{x+y-3} \quad (3.5) \quad \text{を解く。}$

(解) 右辺の分子 $x-y-1$ と分母 $x+y-3$  が同時に  
0となるのは、 $x=2, y=1$ である。そこで

$$x_0 = x - 2$$

$$y_0 = y - 1$$

の変数変換を行うと、式(3.5)は

$$\frac{dy_0}{dx_0} = \frac{x_0 - y_0}{x_0 + y_0} \quad \text{となる。右辺の分子、分母を}$$

それぞれ $x_0$ で割ると  $\frac{dy_0}{dx_0} = \frac{1 - \frac{y_0}{x_0}}{1 + \frac{y_0}{x_0}}$  と同次形となる。

### 例題3.3

つづき

$\frac{y_0}{x_0} = u$  とおき、 $\frac{dy_0}{dx_0} = u + x_0 \frac{du}{dx_0}$  を代入すると

$$u + x_0 \frac{du}{dx_0} = \frac{1-u}{1+u}, \quad \text{よって}$$

$$x_0 \frac{du}{dx_0} = \frac{1-u}{1+u} - u = \frac{1-2u-u^2}{1+u} \quad \text{すなわち}$$

$$\frac{u+1}{u^2+2u-1} \frac{du}{dx_0} = -\frac{1}{x_0} \quad \text{と変数分離形となる。}$$

両辺を $x_0$ で積分すると

## 例題3.3

さらにつづき

$$\int \frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\int \frac{1}{x_0} dx_0 + C_0$$

となる。ここで $C_0$ は任意定数である。左辺において分母  $u^2 + 2u - 1$  の微分が  $2u + 2$  と分子の2倍となることに留意して

$$\frac{1}{2} \log |u^2 + 2u - 1| = -\log |x_0| + C_0 \quad \text{即ち}$$

$$\begin{aligned} \log |u^2 + 2u - 1| &= -2 \log |x_0| + 2C_0 = \log \frac{1}{x_0^2} + \log \{ \exp(2C_0) \} \\ &= \log \frac{\exp(2C_0)}{x_0^2} \end{aligned}$$

### 例題3.3

さらにつづき

$\therefore u^2 + 2u - 1 = \frac{C_{00}}{x_0^2}$  となる。ここで  $C_{00} = \pm \exp(2C_0)$  とした。

$$u = \frac{y_0}{x_0} \text{ を代入すると } \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 + 2\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - 1 = \frac{C_{00}}{x_0^2}$$

$$\therefore y_0^2 + 2x_0y_0 - x_0^2 = C_{00} \text{ となる。}$$

$$x_0 = x - 2, y_0 = y - 1 \text{ の変数変換を元に戻すと}$$
$$(y - 1)^2 + 2(x - 2)(y - 1) - (x - 2)^2 = C_{00} \text{ 即ち}$$

$$-x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 6y + 1 = C_{00}$$

$$\therefore -x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 6y = C \text{ となる。}$$

ただし  $C = C_{00} - 1$  とおいた。



## 展開問題3.1 (9)について、補足

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y} \quad \text{もちろん、同次形}$$

- ただし、分数の計算などが煩雑。もう少し簡略に計算できないか？
  - 本問はテキスト最終近くの14章、**完全微分形**にもなっている。移項し変形すると

$$(2x+y)dx + (x+2y)dy = 0$$

**完全微分形**の場合、積の微分の公式を逆に使えば

## 3.1(9)補足 つづき

$$d(x^2 + xy + y^2) = 0 \quad (*)$$

となっている。

Differential form  
**微分形式**  $d(\dots) = 0$ とは、 $d(\ )$ の中身が変化しない、すなわち、**定数**ということ。

従って、式(\*)から直ちに、

$$x^2 + xy + y^2 = C$$

を一般解として求めることができる。

# 積の微分の公式

- $(yz)' = y'z + yz'$   
•  $d(yz) = zdy + ydz$   
– Etc.

$$dy = \frac{dy}{dx} dx, \quad d(y^2) = 2ydy$$

- 高校以来、左から右への変形におなじみと思うが、**これを逆に使う発想**が、線形の方程式や積分因子法などで生きてくる。  
– 様々な微分方程式を学べば、その使い道が、わかってくるだろう。

例題3.3補足  $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y-1}{x+y-3}$  (3.5) を、完全微分形と考えて解く。

(解) 変形して整理すると

$$(-x + y + 1)dx + (x + y - 3)dy = 0$$

これは**完全微分形**である。よって次のように変形できる

$$d\left(-\frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + x - 3y\right) = 0$$

$$\text{これから明らかに } -\frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + x - 3y = C_1$$

両辺2倍して  $2C_1 = C$  とすれば

$$-x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 6y = C$$



## 参考 完全微分形

- 微分方程式  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  (\*)
- において 
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$
- この時、微分方程式(\*)は、「完全微分形」であるという。
- 元の式(\*)を、 $d[....]=0$ の形に変形が可能。
  - 詳細はテキスト14章。(時間不足で講義では扱えない)



# 4. 1階線形斉次方程式

## 目標

- 1階線形斉次方程式の意味が理解できる
- 1階線形斉次方程式の解き方が理解できる

- $f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$  の形が解ける

- $f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$  の形が解ける

## 4.1 1階線形斉次方程式とは

- 未知関数 $y$ とその1階導関数 $y'$ について1次方程式となっている微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (4.1)$$

を、**1階線形方程式**という。

- $p(x), q(x)$ はある区間で連続で、その区間での解を検討する。
- 式(4.1)で**恒等的に** $q(x) = 0$ である次のような方程式を1階線形**斉次方程式**(または1階線形**同次方程式**)という。

$$y' + p(x)y = 0 \quad (4.2)$$

## 4.1 つづき

- 4章では、**1階線形斉次方程式**の解法を扱う。
- 式(4.1)において、 $q(x) \neq 0$ である方程式を1階線形**非斉次方程式**(または1階線形**非同次**方程式)といい、その解法は5章で扱う。

## 4.2 1階線形斉次方程式の解き方

微分方程式(4.2)は  $\frac{dy}{dx} = -p(x)y$

となり、これは**変数分離形**である。 $y \neq 0$ とし両辺を $y$ で割ると  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -p(x)$

となる。この両辺を $x$ で積分すると

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int p(x) dx + C_0 \quad \text{すなわち} \quad \log|y| = -\int p(x) dx + C_0$$

となる。ここで $C_0$ は任意定数である。

## 4.2

## つづき

いま少し変形すると

$$|y| = \exp \left\{ -\int p(x) dx + C_0 \right\} = \exp C_0 \exp \left\{ -\int p(x) dx \right\}$$

$$y = C \exp \left\{ -\int p(x) dx \right\} \quad (4.3)$$

なお、 $C = \pm \exp C_0$  とおいた。

一方、 $y = 0$  は式(4.3)において  $C = 0$  としたときの特殊解。

以上より、微分方程式(4.2)の一般解は

$$y = C \exp \left\{ -\int p(x) dx \right\}$$

となる。ここで  $C$  は任意定数である。1階微分方程式なので、1つの任意定数  $C$  を含む。

例題4.1  $\frac{dy}{dx} + xy = 0$  (4.4) を解く。

(解) 式(4.4)から  $\frac{dy}{dx} = -xy$  となる。 $y \neq 0$ として両辺

$y$ で割ると  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -x$  となる。この両辺を $x$ で積分

すると  $\int \frac{1}{y} dy = -\int x dx + C_0$

すなわち  $\log|y| = -\frac{1}{2}x^2 + C_0$  となる。 $C_0$ は任意定数である。

いま少し変形すると

$$|y| = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 + C_0\right) = \exp C_0 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

## 例題4.1

つづき

すなわち  $y = C \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$

ただし、 $C = \pm \exp C_0$  とおいた。

一方、 $y = 0$  は式(4.5)において  $C = 0$  としたときの特解である。

以上より、微分方程式(4.4)の一般解は

$$y = C \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

となる。ただし、 $C$  は任意定数である。



例題4.2  $y' - Py = 0$  (4.6) を解く。  
ただし、 $P$ は定数とする。

(解) 式(4.6)は、微分方程式(4.2)において  $p(x) = P$  とした定係数の場合である。よって一般解は

$$y = C \exp \left\{ - \int (-P) dx \right\} = C \exp \left( \int P dx \right) = C \exp(Px)$$

となる。



## 4.3 階数の引き下げによる解き方

2階微分方程式  $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$

において、 **$y$ が含まれていないもの**  $f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$

は、 $\frac{dy}{dx} = u$  とおくと、 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx}$  であるので、

1階微分方程式

$$f\left(x, u, \frac{du}{dx}\right) = 0$$

へと**階数を引き下げられる。**

## 4.3

## つづき

一方、2階微分方程式  $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$

において、 **$x$ が含まれていないもの**  $f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$

は、 $\frac{dy}{dx} = u$  とおくと  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} u$

であるので、 $f\left(y, u, \frac{du}{dy}\right) = 0$  となる。

これは  $y$  を独立変数とする **1階微分方程式** と見なせる。

## 例題 4.3と4.4

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{を解く。}$$

- 上記は $y, x$ を含まない2階微分方程式である。
- この微分方程式を、
  - $y$ が含まれていないと考える場合(例題4.3)
  - $x$ が含まれていないと考える場合(例題4.4)
- の2通りで解いてみる。

例題4.3  $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$  を解く。

(解)  $y$ が含まれていないことに着目し、 $\frac{dy}{dx} = u$

とおく。 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{du}{dx}$  であるので、与式は

$\frac{du}{dx} - u = 0$  即ち  $\frac{du}{dx} = u$  となる。変数分離形なので

容易に一般解  $u = C_1 \exp x \left( = \frac{dy}{dx} \right)$  を得る。 $C_1$ は任意

定数である。さらに両辺を $x$ で積分すると

$$y = C_1 \exp x + C_2 \quad (4.7)$$

となる。ここに、 $C_2$ も任意定数である。



例題4.4  $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$  を解く。

(解)  $x$ が含まれていないことに着目し、 $\frac{dy}{dx} = u$

とおく。 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} u$  であるので、与式は

$$\frac{du}{dy} u - u = u \left( \frac{du}{dy} - 1 \right) = 0 \quad \text{となる。}$$

まず、 $u = 0 \left( = \frac{dy}{dx} \right)$  の時、 $y = C$ となる。 $C$ は任意定数である。

## 例題4.4

つづき

次に、 $\frac{du}{dy} - 1 = 0$  のとき、 $\frac{du}{dy} = 1$  より

$u = y + C_{10} \left( = \frac{dy}{dx} \right)$  となる。 $C_{10}$ は任意定数である。

$u$ を元に戻すと  $\frac{1}{y + C_{10}} \frac{dy}{dx} = 1$  この両辺を $x$ で積分すると

$$\int \frac{1}{y + C_{10}} dy = \int dx \quad \text{すなわち} \quad \log|y + C_{10}| = x + C_{200}$$

$C_{200}$ は任意定数である。さらに変形を続ける。

$$|y + C_{10}| = \exp(x + C_{200}) = \exp C_{200} \exp x$$

## 例題4.4

さらにつづき

すなわち  $y + C_{10} = C_{20} \exp x$

$$\therefore y = C_{20} \exp x - C_{10} \quad (4.9)$$

上記の変形では  $C_{20} = \pm \exp C_{200}$  とおいた。

一方、 $y = C$  は、式(4.9)において  $C_{20} = 0$  とした場合である。

よって、式(4.8)の一般解は

$$y = C_{20} \exp x - C_{10}$$

である。



## 例題 4.3と4.4に関する考察

- 例題4.3と例題4.4は同じ微分方程式であるので、その一般解は当然同一となる。
- 例題4.3の一般解(4.7)の $C_1$ と $C_2$ を、
- それぞれ $C_{20}$ と $-C_{10}$ に置き換えると
- 例題4.4の一般解(4.9)が得られる。



# 5. 1階線形非斉次方程式

## 目標

- 1階線形非斉次方程式の意味が理解できる
- 定数変化法による1階線形非斉次方程式の解き方が理解できる
- 非斉次方程式の一般解は、対応する斉次方程式の一般解と非斉次方程式の特殊解の和であることが理解できる
- 1階線形方程式の解がただ一つだけ存在する条件が理解できる。

## 5.1 1階線形非斉次方程式とは

- 1階線形方程式

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (5.1)$$

において、 $q(x) \neq 0$ である方程式を**1階非斉次線形方程式**(または1階**非同次**線形方程式)という。

–  $q(x)$  を**非斉次項**という。

## 5.2 定数変化法による解き方

Variation of constants, by Lagrange

- 非斉次方程式の一般解を、対応する斉次方程式の解  $y_h$  と、未知関数  $c$  の積とおいて解く方法を**定数変化法**という。
- この解法は、本章で扱う1階線形非斉次方程式だけでなく、**幅広い応用範囲**を持っている。
  - 特性方程式が2重解となる定係数2階線形斉次方程式
  - 2階線形斉次方程式で1つの基本解からもう1つの基本解を求める場合
  - **2階線形非斉次方程式**

# 定数変化法

- 1階線形斉次方程式

$$y' + p(x)y = 0 \quad (5.2)$$

の一般解は、4.2節で求めたように

$$y = C_0 \exp\left\{-\int p(x)dx\right\} \quad (5.3)$$

で与えられる。式(5.3)において、 $y_h = \exp\left\{-\int p(x)dx\right\}$ とおくとともに、任意定数 $C_0$ を $x$ の未知関数 $c$ と置き換え、

$$y = cy_h \quad (5.4)$$

として1階線形非斉次方程式(5.1)を解く。 $y_h$ は既知、よって未知関数 $c$ が求まればよい。

# 定数変化法

つづき

- 2つの関数  $c$  と  $y_h$  が  $x$  の関数であることに注意すると、 $y$  の1階導関数は

$$y' = c' y_h + c y_h' \quad (5.5)$$

となる。式(5.4)と式(5.5)を、式(5.1)に代入して整理すると

$$(c' y_h + c y_h') + p(x) c y_h = q(x), \text{ すなわち}$$

$$c' y_h + c \{ y_h' + p(x) y_h \} = q(x)$$

ここで、 $y_h$  は1階線形斉次方程式(5.2)の解であるので、左辺第2項の  $\{ \}$  内はゼロとなる。よって

$$c' y_h = q(x)$$

# 定数変化法

さらにつづき

- 上記の式から $c$ を決定することが可能となる。即ち

$$c' = \frac{q(x)}{y_h} = \frac{q(x)}{\exp\left\{-\int p(x)dx\right\}} = q(x)\exp\left\{\int p(x)dx\right\}$$

- 積分すると

$$c = \int \left[ q(x)\exp\left\{\int p(x)dx\right\} \right] dx + C$$

–  $C$ は任意定数である。よって、一般解は

$$\begin{aligned} y = cy_h &= \left\{ \int \left[ q(x)\exp\left\{\int p(x)dx\right\} \right] dx + C \right\} \exp\left\{-\int p(x)dx\right\} \\ &= \exp\left\{-\int p(x)dx\right\} \int \left[ q(x)\exp\left\{\int p(x)dx\right\} \right] dx \\ &\quad + C \exp\left\{-\int p(x)dx\right\} \end{aligned} \tag{5.6}$$

# 定数変化法

さらにつづき

- 式(5.1)は1階微分方程式であるので、その一般解(5.6)は1つの任意定数 $C$ を含む。
- 式(5.6)の変形は、単純な乗算で積分操作ではないから、別の任意定数を新たにつける必要はない。
  - というか、つけてはいけない。

# 線形非斉次微分方程式の解の構造

- ここで、非斉次方程式(5.1)の一般解(5.6)の右辺第2項

$$C \exp\left\{-\int p(x) dx\right\}$$

は、対応する斉次方程式(5.2)の一般解。

- 第1項  $\exp\left\{-\int p(x) dx\right\} \int \left[ q(x) \exp\left\{\int p(x) dx\right\} \right] dx$

は、非斉次方程式の特殊解である

- 一般に、**線形非斉次方程式の一般解は、対応する線形斉次方程式の一般解に、もとの非斉次方程式の特殊解**(なんでも良い)を加えたものとなっている。

# 線形に限るが...

非斉次の一般解

= 斉次の一般解

+ 非斉次の特殊解

- それゆえ、非斉次の線形微分方程式については、
  - まずは斉次の一般解をもとめ、
  - そのあと、定数変化法、あるいは未定係数法などで非斉次の特殊解の1つを探す、
  - という手順で一般解を求めることとなる。

# 非斉次方程式の解の存在と一意性

- 式(5.6)において、ある点 $x = X$ での $y$ の値を指定すると、 $C$ の値が一意に定まる。
- すなわち、非斉次方程式(5.1)の解がただ一つだけ必ず存在する。

## 例題5.1 $y' + xy = x$ を解く。

(解) まず、導出手順を理解すべく、公式を使わず解く。

対応する斉次方程式は  $y' + xy = 0$ , これは式(4.4)。

従ってその一般解は式(4.5),  $y = C_0 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ .

そこで、 $y_h = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$  として任意定数  $C_0$  を

未知関数  $c$  と置き換え、 $y = cy_h = c \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$  とおく。

これを問題文の非斉次方程式に代入すると

## 例題5.1

つづき

$$y' + xy = \left\{ c' \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) - \cancel{xc \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)} \right\} + x \left\{ \cancel{c \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)} \right\} = x$$

のように、斉次方程式の解の部分

$$c\left(y'_h + xy_h\right) = c\left\{-x \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + x \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right\} = 0$$

がキャンセルされる。以下、計算を続行する。

$$c' \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = x$$

$$c' = x \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

## 例題5.1

さらにつづき

$$c = \int x \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) dx + C = \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C$$

$$\therefore y = \left\{ \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C \right\} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = 1 + C \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

と、一般解が求められた。

一方、公式(5.6)をそのまま使ってみる。 $p(x) = x$ ,  $q(x) = x$  となる。したがって

## 例題5.1

さらにつづき

$$\begin{aligned}y &= \exp\left\{\int(-x)dx\right\} \cdot \int\left\{x \exp\left(\int x dx\right)\right\}dx + C \exp\left\{\int(-x)dx\right\} \\&= \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \int\left\{x \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)\right\}dx + C \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \\&= \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \\&= 1 + C \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\end{aligned}$$

と、同一の結果が得られる。



## 例題5.1 の補足

- しかしながら、「非斉次一般解＝斉次一般解＋非斉次特殊解」の基本原則や、
- 公式(5.6)などに、常にこだわる必要はない。
  - もっとスマートな方法、特に計算ミスの少ない方法があれば、その方が良い。
- 例えば、「積の微分の公式」を逆に使う。
  - ある種の**積分因子法**

Integrating factor

$$(yz)' = y'z + yz', \quad \frac{d}{dx}(yz) = \frac{dy}{dx}z + y\frac{dz}{dx}$$

## 補足：例題5.1のもう一つの解法（積分因子法）

- $y' + xy = x$
- 左辺の形に着目して、積の微分の公式が使えるように変形したい。そこで、両辺に $s(x)$ をかけて、
- $s(x)y' + s(x)xy = s(x)x$  として、 $\frac{ds(x)}{dx} = s(x)x$  となるように $s(x)$ を決める。
  - 式の変形をするだけなので、 $s(x)$ は特殊解が一つわかればそれで良い。
  - 変数分離なので容易。

## 例題5.1のもう一つの解法の続き

- $\frac{1}{s} \frac{ds}{dx} = x$  となるので、両辺を $x$ で積分すると
$$\log|s| = \frac{1}{2}x^2 + C_0$$
- これから  $s = \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)$  が特殊解の一つと判る
- そこで、元の式の両辺に上の $s$ をかけると

$$\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)y' + x \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)y = x \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

- これで左辺を変形できて、
$$\frac{d}{dx} \left\{ \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)y \right\} = x \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$
- この両辺を $x$ で積分すると

$$\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)y = \int x \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) dx = \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C$$

- すなわち一般解は  $y = 1 + C \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$



例題5.2  $y' - Ay = x$  を解く。ただし、 $A$ は定数である。

(解) 式(5.6)において、 $p(x) = -A$ ,  $q(x) = x$  の場合である。

したがって一般解は

$$\begin{aligned} y &= \exp\left(\int A dx\right) \int \left\{ x \exp\left(-\int A dx\right) \right\} dx + C \exp\left(\int A dx\right) \\ &= \exp(Ax) \int \left\{ x \exp(-Ax) \right\} dx + C \exp(Ax) \\ &= \exp(Ax) \left\{ -\frac{x}{A} \exp(-Ax) + \int \frac{1}{A} \exp(-Ax) dx \right\} + C \exp(Ax) \\ &= \exp(Ax) \left\{ -\frac{x}{A} \exp(-Ax) - \frac{1}{A^2} \exp(-Ax) \right\} + C \exp(Ax) \\ &= -\frac{x}{A} - \frac{1}{A^2} + C \exp(Ax) \end{aligned}$$



例題5.2補足  $y' - Ay = x$  を解く。ただし、 $A$ は定数である。

(解) 積分因子法を使ってみる。両辺に $\exp(-Ax)$ をかければ良いことは一目瞭然であろう。すなわち、

$$\exp(-Ax)y' - A\exp(-Ax)y = \exp(-Ax)x$$

$$\text{左辺を変形すると } \frac{d}{dx}\{\exp(-Ax)y\} = \exp(-Ax)x$$

この両辺を $x$ で積分すると

$$\begin{aligned}\exp(-Ax)y &= \int \exp(-Ax)x \, dx = \left(-\frac{1}{A}\right)\exp(-Ax)x + \frac{1}{A} \int \exp(-Ax) \, dx \\ &= -\frac{1}{A}\exp(-Ax)x - \frac{1}{A^2}\exp(-Ax) + C \\ \therefore y &= -\frac{x}{A} - \frac{1}{A^2} + C \exp(Ax)\end{aligned}$$



**例題5.3**  $y' - Ay = \exp(Bx)$  を解く。ただし、 $A, B$ は定数であるが、 $A \neq B$ である。

(解) 式(5.6)において、 $p(x) = -A$ ,  $q(x) = \exp(Bx)$  の場合である。したがって一般解は

$$\begin{aligned} y &= \exp\left(\int A dx\right) \int \left\{ \exp(Bx) \exp\left(-\int A dx\right) \right\} dx + C \exp\left(\int A dx\right) \\ &= \exp(Ax) \int \left\{ \exp(Bx) \exp(-Ax) \right\} dx + C \exp(Ax) \\ &= \exp(Ax) \int \left[ \exp\{(B-A)x\} \right] dx + C \exp(Ax) \\ &= \exp(Ax) \left[ \frac{1}{B-A} \exp\{(B-A)x\} \right] + C \exp(Ax) \\ &= \frac{1}{B-A} \exp(Bx) + C \exp(Ax) \end{aligned}$$



## 例題5.4 $y' - Ay = \exp(Ax)$ を解く。

(解) 例題5.3において  $A = B$  の場合である。式(5.6)において  $p(x) = -A$ ,  $q(x) = \exp(Ax)$  である。よって一般解は

$$\begin{aligned} y &= \exp\left(\int A dx\right) \int \left\{ \exp(Ax) \exp\left(-\int A dx\right) \right\} dx + C \exp\left(\int A dx\right) \\ &= \exp(Ax) \int \left\{ \exp(Ax) \exp(-Ax) \right\} dx + C \exp(Ax) \\ &= \exp(Ax) \int dx + C \exp(Ax) \\ &= x \exp(Ax) + C \exp(Ax) \end{aligned}$$

上の一般解第1項が特殊解に相当するが、その関数形は  $\frac{1}{B-A} \exp(Bx)$  ではなく、 $x \exp(Ax)$  のように、

**指数関数に $x$ を掛けた形**になっていることに留意されたい。

## 例題5.4補足

$\frac{1}{B-A} \exp(Bx) + C \exp(Ax)$  で、 $B \rightarrow A$ の時の特殊解をどう考える？

- 上のままでは $B \rightarrow A$ で発散する。任意定数を若干変形して  $C = -\frac{1}{B-A} + C_0$  として上式を書き換えると

- $\frac{1}{B-A} \left[ \exp(Bx) - \exp(Ax) \right] + C_0 \exp(Ax)$
- ここで $B \rightarrow A$ とすると  $\lim_{B \rightarrow A} \frac{\exp(Bx) - \exp(Ax)}{B-A}$  は、

- 微分の定義により

$$\lim_{B \rightarrow A} \frac{\exp(Bx) - \exp(Ax)}{B-A} = \frac{d}{dA} \left\{ \exp(Ax) \right\} = x \exp(Ax)$$

それゆえ指数関数に $x$ を掛けたような特殊解が現れる。

## 例題5.5 $xy' - y = x$ を解く。

(解) 両辺を $x$ で割ると、 $y' - \frac{1}{x}y = 1$  となる。式(5.6)において、 $p(x) = -1/x$ ,  $q(x) = 1$  の場合である。

$$\begin{aligned} y &= \exp\left(\int \frac{1}{x} dx\right) \int \exp\left(-\int \frac{1}{x} dx\right) dx + C \exp\left(\int \frac{1}{x} dx\right) \\ &= \exp(\log|x|) \int \exp(-\log|x|) dx + C \exp(\log|x|) \\ &= x \int \frac{1}{x} dx + Cx = x \log|x| + Cx \end{aligned}$$

なお、問題の微分方程式を変形すると  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 1$

となり、例題3.1の微分方程式と同一である。

例題5.5補足  $xy' - y = x$  を積分因子法で解く。

(解) 両辺を $x^2$ で割ると、 $\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x}$  となる。すなわち

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y\right) = \frac{1}{x} \quad \text{この両辺を}x\text{で積分すると}$$

$$\frac{y}{x} = \int \frac{1}{x} dx + C = \log|x| + C$$

$$y = x \log|x| + Cx$$



当然、解答は公式を使っても、斉次一般解＋非斉次特殊解としても、同一となる。種々の方法を試みられたい。

## まとめ：本日の確認事項

- 同次形の意味が理解できる
- 同次形の解き方が理解できる
- $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{Ax + By + C}{Dx + Ey + F}\right)$  の形が解ける
- 1階線形斉次方程式の意味が理解できる
- 1階線形斉次方程式の解き方が理解できる
- $f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$  の形が解ける
- $f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$  の形が解ける

## まとめ つづき

- 1階線形非斉次方程式の意味が理解できる
- 定数変化法による1階線形非斉次方程式の解き方が理解できる
- 非斉次方程式の一般解は、対応する斉次方程式の一般解と非斉次方程式の特殊解の和であることが理解できる
- 1階線形方程式の解がただ一つだけ存在する条件が理解できる。