解析学　演習５　解答例

5.1　積分路を 1+i から 3+2i までの線分として，$f(z)$=Im(z) を積分せよ．(配点:20 点)

(解答例) 積分路を媒介変数 t で表すと，一例として，

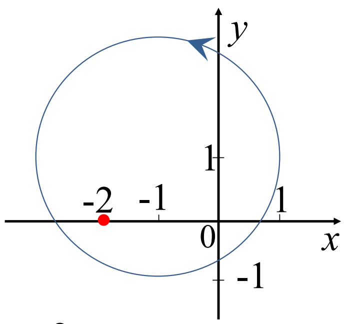
$z(t)=(2+i)t+(1+i),\ (0\le t\le 1),\ \ dz=(2+i)dt$.

すると Im $z(t)$ = t+1 なので,

$$\int_C \mathrm{Im}(z)dz=\int_0^1(t+1)(2+i)dt=(2+i)\int_0^1(t+1)dt=(2+i)\left[\frac{t^2}{2}+t\right]_0^1=(2+i)\frac{3}{2}$$

$$=3+\frac{3}{2}i \quad (答)$$

5.2　積分路 C: $|z+1-i|=2$ とするとき，コーシーの積分定理を使って，



$$\int_C\frac{3z}{(z+2)(z-4)}dz$$ を求めよ．(配点:20 点)

(解答例)　被積分関数を部分分数分解すると，

$$\frac{3z}{(z+2)(z-4)}=\frac{1}{z+2}+\frac{2}{z-4}$$　従って, C 内の特異点は $z=-2$ のみ.

よって,コーシーの積分定理により，C 内で正則な 2/(z−4)の C 回りの周回積分は 0 になる.

すなわち,　$$\int_C\frac{3z}{(z+2)(z-4)}dz=\int_C\frac{1}{z+2}dz+\int_C\frac{2}{z-4}dz=\int_C\frac{1}{z+2}dz$$

1/(z−z_0)の z_0 回りの周回積分は教科書 p.50,例題 8.2,式(8.6)で実際に計算した通り, z_0 の値によらず 2πi になる．よって,

$$\int_C\frac{1}{z+2}dz=2\pi i \quad (答)$$

5.3 積分路 C が，中心 z=0，半径 3 の円のとき，コーシーの積分定理を使って，

$$\int_C \frac{3z}{(z+2)(z+2i)}dz$$ を求めよ．(配点:20 点)

(解答例１) 被積分関数を部分分数分解すると，

$$\frac{3z}{(z+2)(z+2i)} = \frac{3}{1-i}\frac{1}{z+2} + \frac{-3i}{1-i}\frac{1}{z+2i}$$ C 内の非正則点は $z=-2$ と $z=-2i$ なので，

それぞれの点を中心とする小円 C_1, C_2 に積分路を分割し,それぞれの周回積分を計算して和を取ればよい.すなわち,

$$\int_C \frac{3z}{(z+2)(z+2i)}dz = \frac{3}{1-i}\int_{C_1}\frac{1}{z+2}dz + \frac{-3i}{1-i}\int_{C_2}\frac{1}{z+2i} = 2\pi i\left(\frac{3}{1-i}+\frac{-3i}{1-i}\right) = 2\pi i\frac{3(1-i)}{1-i} = 6\pi i$$

ただし,5.2 と同様, $1/(z-z_0)$の z_0 回りの周回積分が z_0 によらず $2\pi i$ になることを用いた.

(解答例２) コーシーの積分公式を使う方法.

z=−2 の非正則点に着目して,積分路をこの点の近傍を一周する小円 C_1 に変更した上で,

$f(z)=\dfrac{3z}{z+2i}$ とおくと,小円 C_1 周りの積分は $\displaystyle\int_{C_1}\frac{f(z)}{z+2}dz$ となる.

ここで,コーシーの積分公式(10.1)で z_0=−2 とおくと， $\displaystyle\int_{C_1}\frac{f(z)}{z+2}dz = 2\pi i f(-2)$

$$= 2\pi i\frac{3(-2)}{-2+2i}$$

一方, z=−2i の非正則点に着目して $f(z)=\dfrac{3z}{z+2}$ とおき,積分路を点 z=−2i の近傍を一周する小円 C_2 に変更すると， $\displaystyle\int_{C_2}\frac{f(z)}{z+2i}dz = 2\pi i f(-2i) = 2\pi i\frac{3(-2i)}{-2i+2}$

以上より， $\displaystyle\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} = 2\pi i\left\{\frac{-3}{-1+i}+\frac{-3i}{-i+1}\right\} = 6\pi i$ (答)

部分分数分解に困ったときは,迷わずコーシーの積分公式,あるいはグルサの公式を使うとよい.

5.4　次の積分を求めよ． $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2+1}dz$，積分路 C: $|z-i|=1$　(配点:20 点)

(解答例)　5.3 の解答例２と手順は同じ．

$\dfrac{e^z}{z^2+1} = \dfrac{e^z}{(z+i)(z-i)}$　なので，$z=-i$, $z=i$　の２点が非正則点だが，C　内にあるのは $z=i$　のみである．

$z=i$　についてコーシーの積分公式を適用して，$f(z)=\dfrac{e^z}{z+i}$ とおくと, $f(i)=\dfrac{e^i}{2i}$

それぞれに２π i を乗じて和を取れば積分値を得る．　$2\pi i\dfrac{e^i}{2i} = \pi e^i$　(答)

5.5　次の積分を求めよ． $\displaystyle\int_C \frac{z+1}{(z-4)(z-1)^2}dz$，積分路 C: $|z|=2$　(配点:20 点)

(解答例)

$\dfrac{z+1}{(z-4)(z-1)^2}$ で $z=4$　は C 外の，$z=1$ は C 内の非正則点．非正則項の分母のべき乗が高次の時は,次のグルサの公式を使う．

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad (10.3)$$

与式の分母$(z-1)^2$ の項を,グルサの公式の $(z-z_0)^{n+1}$ とみなすと，それ以外の部分を$f(z)$とみなして, $f(z)=\dfrac{z+1}{z-4}$ とおき, n=1，z_0=1 を代入して(10.3)式の周回積分= の式に変形すると,

(与式) $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}dz = 2\pi i f'(1)$ …(★)

ここで$f(z)$の導関数を別途計算すると，$f'(z) = \dfrac{(z-4)-(z+1)}{(z-4)^2} = \dfrac{-5}{(z-4)^2}$

よって，$f'(1) = -\dfrac{5}{9}$

(★)式に代入すると積分値は，$2\pi i\, f'(1) = 2\pi i\dfrac{-5}{9} = -\dfrac{10}{9}\pi i$　(答)