解析学　第5回

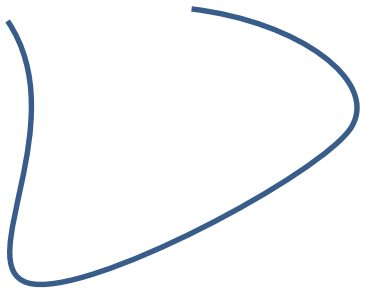
コーシーの積分定理

- コーシーの積分定理
- 積分路の変更
- 多重連結領域

コーシーの積分公式

- コーシーの積分公式
- 正則関数の導関数
- モレラの定理・リューヴィルの定理

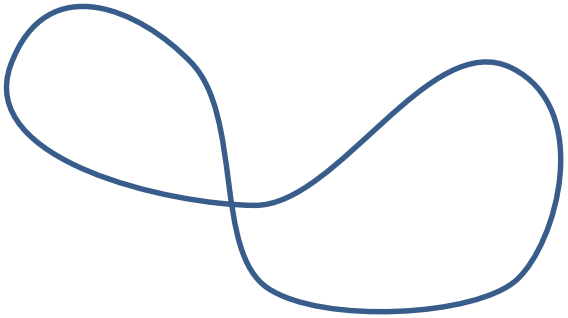
積分路，領域に関する用語の整理



単一開曲線

（閉じていない端部がある．形状は任意）

単一閉曲線



非単一閉曲線

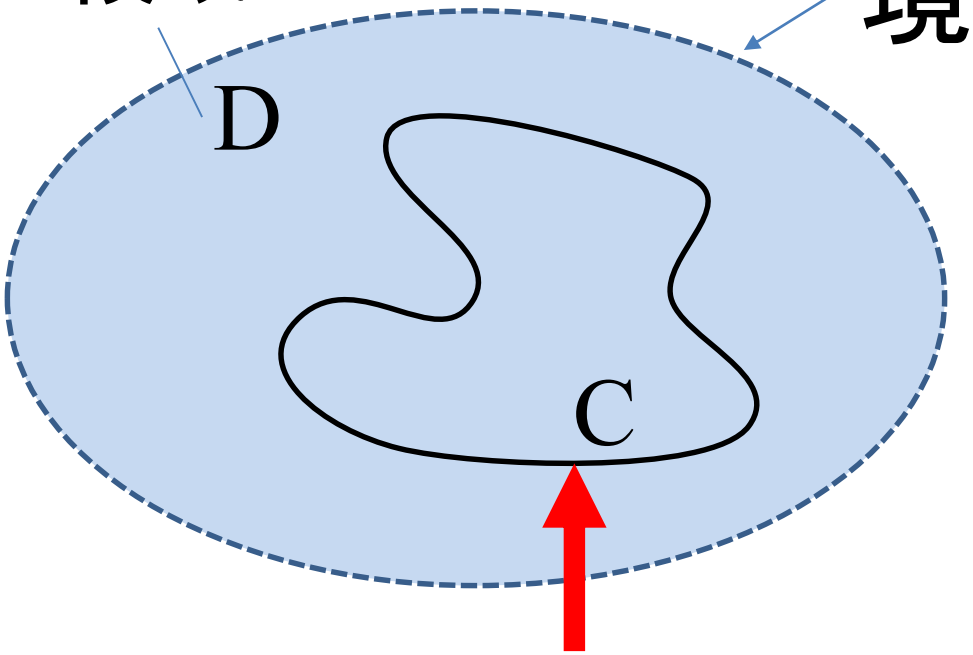
（自分自身と交わった一つの曲線）

領域と閉曲線

複素平面上の

領域

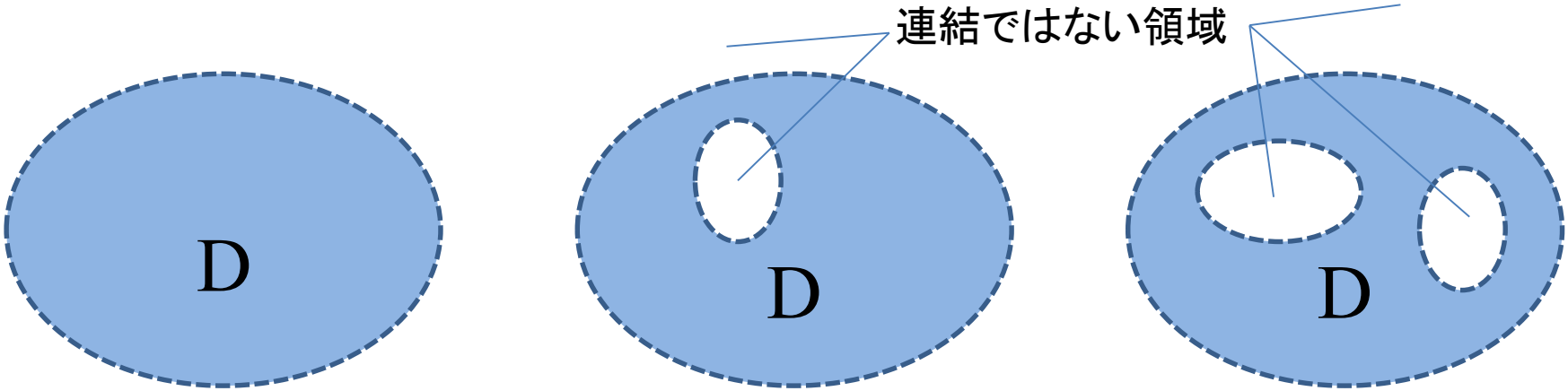
境界を含まない



微分積分は
「領域」で考える

「領域D内の単一閉曲線C」

多重連結領域



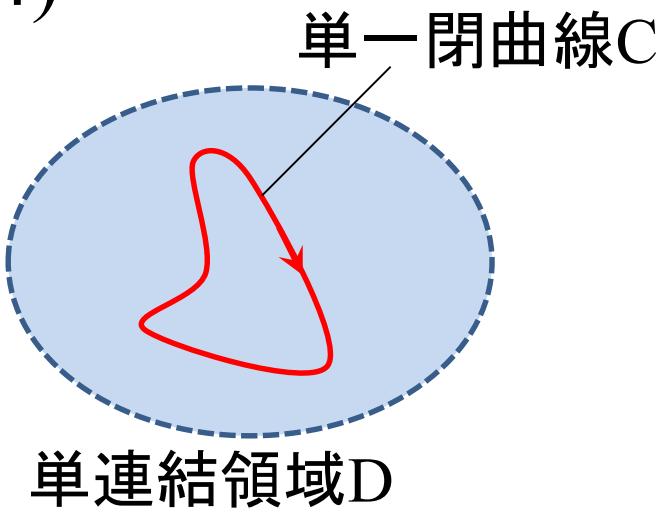
単連結領域　　２重連結領域　　３重連結領域

連結ではない領域の数nに応じて
n重連結領域という

コーシーの積分定理

関数$f(z)$が，単連結領域Dで正則ならば，
D内の単一閉曲線Cに対して，次式が成り立つ．

$$\boxed{\int_C f(z)dz = 0} \qquad (9.4)$$



いかなる形状の積分路でも，関数がDで正則でありさえすれば，閉じた曲線上を一周積分すると値はいつでも0になる，といっている。

注意すべきなのは，積分路C上で正則であるだけでは不十分で，Cを含む領域Dすべてにわたって正則でなければならないことである．

証明）(方針) 2次元平面上の実関数に対して成り立つグリーンの定理と，コーシー･リーマンの方程式を組み合わせて証明する.

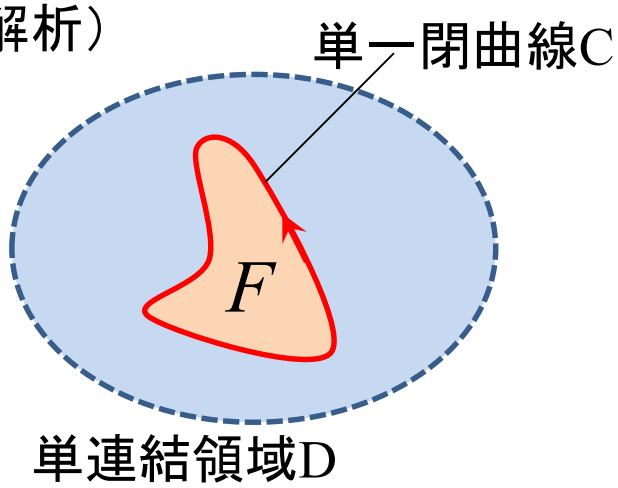
(グリーンの定理)

2次元実数平面上の領域D内の単一閉曲線Cと，Cで囲まれた領域をFとする.

F内の2つの実関数P(x,y), Q(x,y)に対して,次のグリーンの定理が成り立つ.（証明はベクトル解析）

$$\int_C (Pdx + Qdy) = \iint_F \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad (9.1)$$

線積分　　面積分



（→証明はAppendix:グリーンの定理の証明のページへ）

複素関数f=u+ivの実部uをP(x,y)に，虚部vをQ(x,y)に対応させようというのである

グリーンの定理に対する注意

- グリーンの定理は実関数に関する定理で，元来，複素関数に対するものではないが，
- 複素関数の実部と虚部はそれぞれ2変数の実関数だから，形式的に適用は可能である.
- ただし，適用する際には，右辺で領域F内での微分を使っているので，
- 右辺の領域F内の全ての点で(実関数として)x,yそれぞれについて偏微分可能でなければならない
- 正則な複素関数を前提にすれば上記は成り立つ

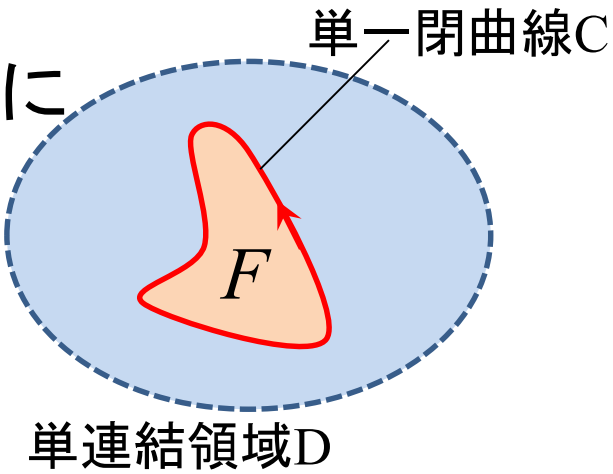
証明）

(方針) 2次元平面上の実関数に対して成り立つグリーンの定理と，コーシー･リーマンの方程式を組み合わせて証明する.

関数$f(z)$はDで正則，かつその導関数$f'(x)$は連続と仮定すると，$f(z)$の複素積分は次のように展開できる.

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)$$

右辺第1項と第2項が実関数の方程式になっていることに注意して，それぞれグリーンの定理を当てはめると，



(右辺第1項)

$$\int_C (udx - vdy) = \iint_F \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy$$

証明）

(方針) 2次元平面上の実関数に対して成り立つグリーンの定理と，コーシー･リーマンの方程式を組み合わせて証明する．

(右辺第1項(実部))

$$\int_C (udx - vdy) = \iint_F \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy = \iint_F \left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}} \right) dxdy$$

グリーンの定理

コーシー･リーマンの方程式を代入すると

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= 0$$

(右辺第2項(虚部))

$$\int_C (vdx + udy) = \iint_F \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = \iint_F \left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} \right) dxdy$$

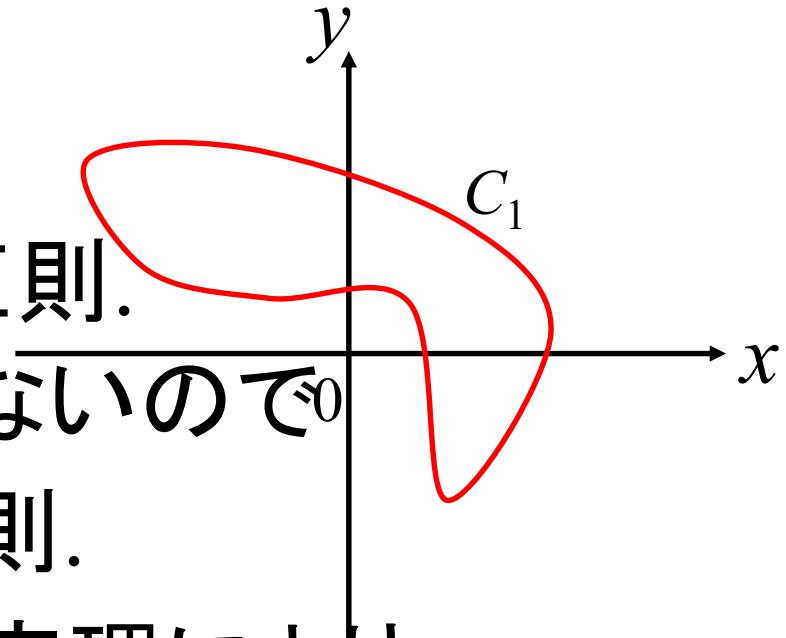
グリーンの定理

$$= 0$$

よって積分値は0になることが示された．

例）$1/z$の周回積分

- 閉曲線C_1に沿った積分

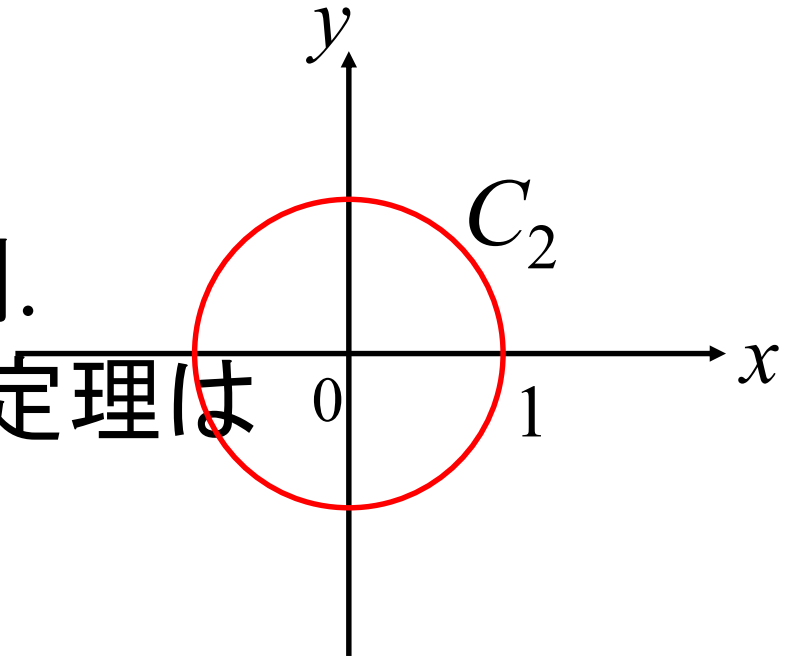


関数$1/z$は,原点以外で正則.
閉曲線C_1は原点を含まないので
閉領域内部では全て正則.
よって、コーシーの積分定理により

$$\int_{C_1} \frac{1}{z} dz = 0$$ である.

例）$1/z$の周回積分

- 閉曲線C_2に沿った積分



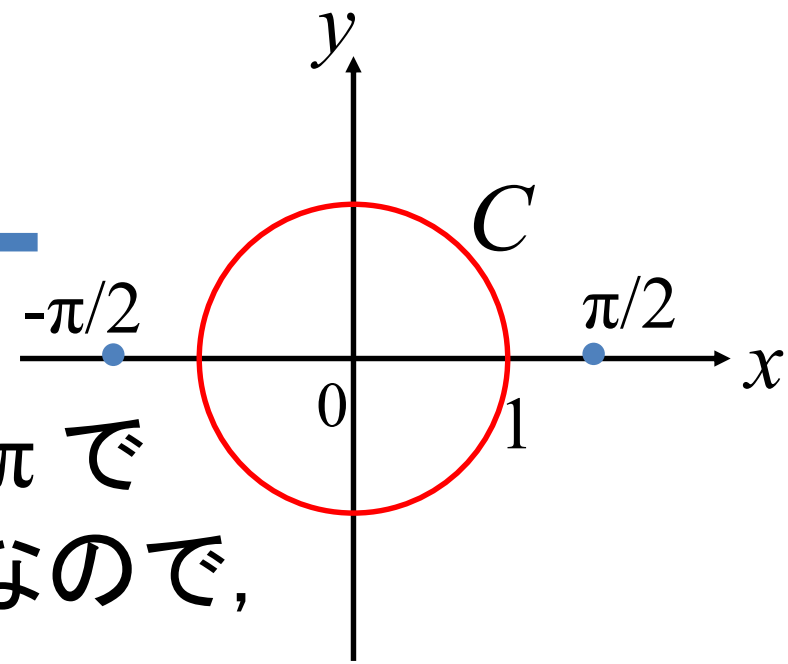
関数$1/z$は,原点で非正則.
よって，コーシーの積分定理は
成り立たない.
実際, 例題8.2より,

$$\int_{C_2} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$ であった.

例題９．１

積分路を単位円C: $|z|=1$ として
次の関数を積分せよ

1) $$\frac{1}{\cos z}$$



この関数は, $z = \pm\pi/2+2n\pi$ で
非正則だが 単位円の外なので,

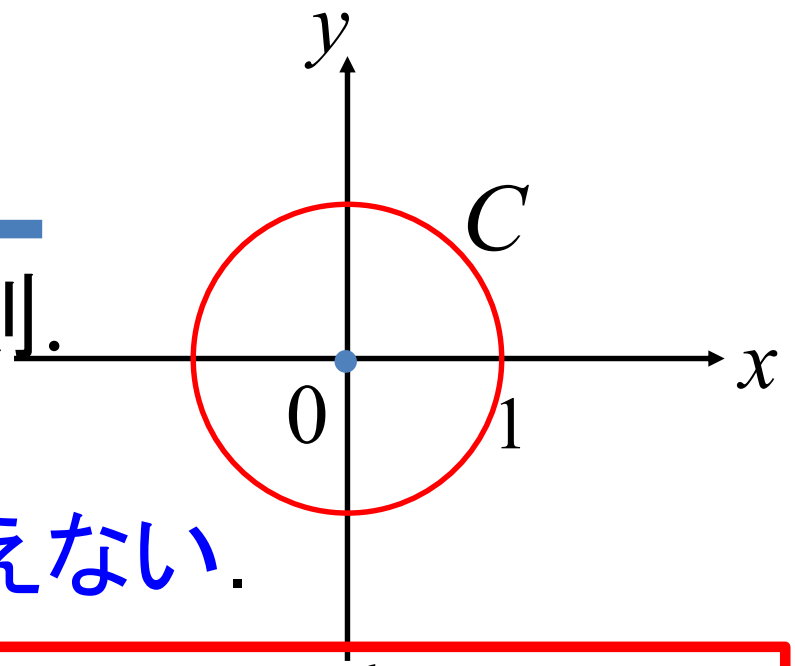
単位円の内部では正則.

よって, コーシーの積分定理が成り立つ
ので, 積分の値は０ ■

例題９．１

積分路を単位円C: $|z|=1$ として
次の関数を積分せよ

3) $\dfrac{1}{z^2}$



この関数は, $z=0$ で非正則.
単位円の内側なので,
コーシーの積分定理は使えない.

前章で求めた整数べき関数の公式(8.6)で,

$$\boxed{\int_C (z-z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & (m=-1) \\ 0 & (m \neq -1) \end{cases}}$$

$z_0=0$, $m=-2$ とすると, 積分値は0である. ■

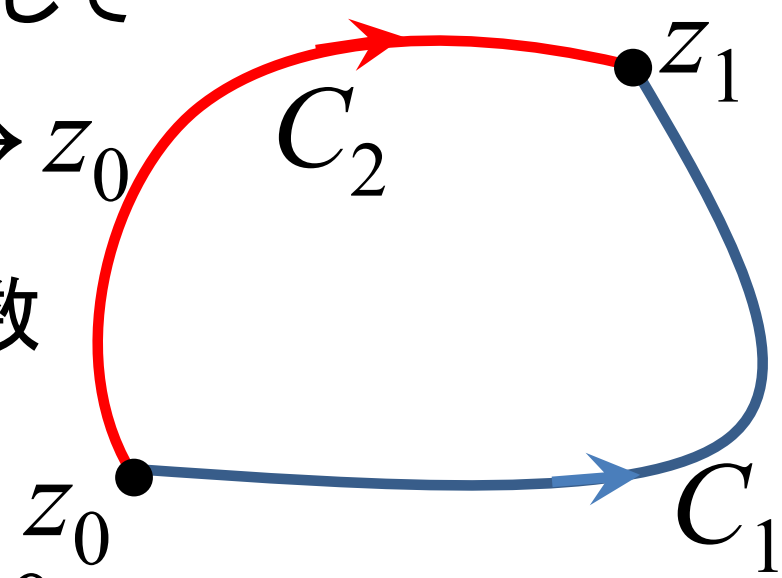
積分路の変更

単連結領域中の2点z_0, z_1 とする．また,

2点を結ぶ2つの積分路をC_1, C_2とする.

ここで, C_2の経路を逆($-C_2$)にして

$$z_0 \to C_1 \to z_1 \to -C_2 \to z_0$$



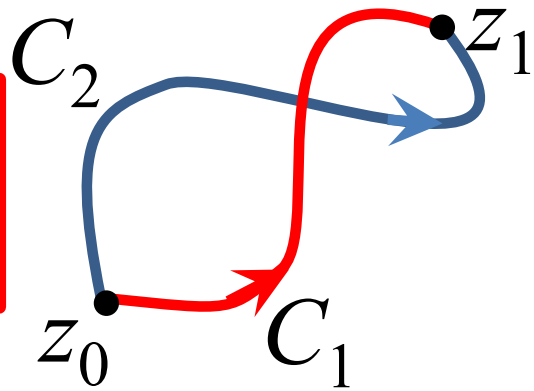
と一周する経路Cで正則関数$f(z)$を積分すると,コーシーの積分定理から

$$\int_C f(z)dz = 0$$

積分路の公式3)【逆進】, 4)【分割】から

$$\Leftrightarrow \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz} \quad (9.4)$$



よって,

- 単連結領域D内の2点間を結ぶ積分は, 経路の取り方によらず同じ値になる.
- どのように経路を変更しても値は同じ.
  (交差してもかまわない)

関数$f(z)$が,領域D内で正則であることが条件

不定積分と定積分の関係式

6） $F'(z) = f(z)$ ならば, $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$ (定積分) (8.4)

（$F(z)$を$f(z)$の不定積分と呼ぶ）

証明）$f(z)$が単連結領域Dで正則とすると，式(9.4)より，始点をz_0，終点をzとする積分

$$\int_{z_0}^{z} f(s)ds$$

は,z_0, z によらず同一の値となる.

この値は z の関数であるから次のようにおく.

$$\int_{z_0}^{z} f(s)ds = F(z)$$

つづく

ここから, $F'(z) = f(z)$ を導こう.

導出）　F'(z)の定義より,

$$\frac{F(\boxed{z+\Delta z})-F(\boxed{z})}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{\boxed{z+\Delta z}} f(s)ds-\int_{z_0}^{\boxed{z}} f(s)ds\right)$$

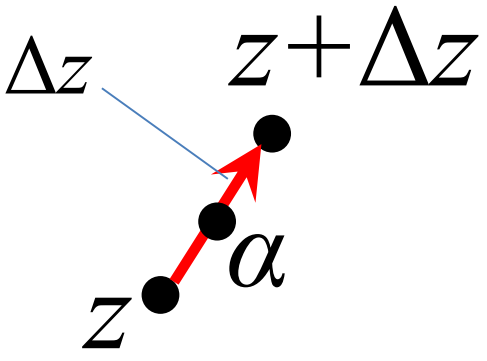
$$=\frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)ds\boxed{+}\int_{\boxed{z}}^{\boxed{z_0}} f(s)ds\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z}^{z_0} f(s)ds+\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)ds\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(s)ds$$

$$= \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} f(s)ds$$

$$= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(s)ds$$



積分の定義式より，$\Delta z \to 0$ の極限で，

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(s)ds = f(\alpha)\Delta z$$

(ただしαは，積分路上zと$z+\Delta z$の間に位置する複素数)

なので，これを上の式に代入すると

$$= \frac{1}{\Delta z} f(\alpha)\Delta z \ = f(\alpha)$$

$\Delta z \to 0$ の極限では，$f(z)$が有界で連続である条件の下で，

$$f(\alpha) \to f(z)$$

以上より,$\Delta z \to 0$のとき

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} \to f(z)$$

が示されたので, $F(z)$は$f(z)$の不定積分といえる. ■

前ページの議論を,ε-Δ論法で少し丁寧に記述してみる.

$$= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(s)ds$$

←ここまでの議論は同じ

始点の関数値$f(z)$を足して引く

$$= \frac{1}{\Delta z}\left[\underline{\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)ds} + \int_{z}^{z+\Delta z}\{f(s)-f(z)\}ds\right]$$

$$\boxed{= f(z)\cdot\Delta z}$$

($f(z)$はsに対して定数なので積分の外に出した)

$$= f(z) + \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\{f(s)-f(z)\}ds$$

ここで $\Delta z \to 0$ の極限を考える．このとき，$f(z)$が有限かつ連続ならば，いかに小さな$\varepsilon>0$を仮定したとしても，不等式 $\left|\underset{\text{経路上の値}}{f(s)} - \underset{\text{始点の値}}{f(z)}\right| < \varepsilon$ を満たすようなΔzが存在することが保証されている(連続の定義).

そこでεを最大値(M)とみなしてML方程式を適用すると

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_z^{z+\Delta z}\{f(s)-f(z)\}ds\right|$$

ここで赤線部にML不等式を使うと

$$\leq\frac{\varepsilon|\Delta z|}{|\Delta z|}=\varepsilon$$

たとえ$f(z)$が不連続でも有界ならよい．無限大になるところがあるとダメ．

εとしてどんなに小さな値を選んでも，上の不等式が成り立つ(ようにΔzを→0により追随させて選ぶことができる)のであったから，ε→0の極限で

$$F'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)$$

$F(z)$の微分が$f(z)$であることが示されたので，
$F(z)$は$f(z)$の不定積分であることが証明された．

不定積分の表式を使って，下の定積分の関係式を証明しよう.

6） $F'(z) = f(z)$ ならば， $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$ (定積分) (8.4)

（$F(z)$を$f(z)$の不定積分と呼ぶ）

---

z_0, z_1と異なる複素数をz_2とし，$f(z)$の不定積分$F(z)$を次のように表す.(z_2はなんでもよい)

$$F(z) = \int_{z_2}^{z} f(s)ds$$

上の式を用いて，

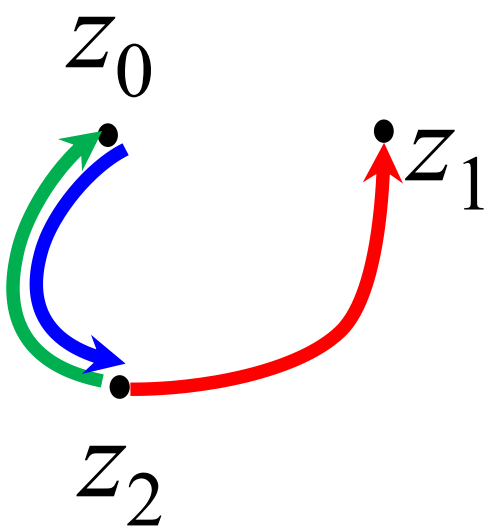
$$F(z_1) - F(z_0) = \int_{z_2}^{z_1} f(s)ds - \int_{z_2}^{z_0} f(s)ds$$

$$= \int_{z_2}^{z_1} f(s)ds + \int_{z_0}^{z_2} f(s)ds$$

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_{z_2}^{z_1} f(s)ds - \int_{z_2}^{z_0} f(s)ds$$

$$= \underline{\int_{z_2}^{z_1} f(s)ds} + \underline{\int_{z_0}^{z_2} f(s)ds}$$

$$F(z_1)-F(z_0)=\int_{z_2}^{z_1} f(s)ds - \int_{z_2}^{z_0} f(s)ds$$



$$=\int_{z_2}^{z_1} f(s)ds + \int_{z_0}^{z_2} f(s)ds$$

$$=\int_{z_0}^{z_2} f(s)ds + \int_{z_2}^{z_1} f(s)ds$$

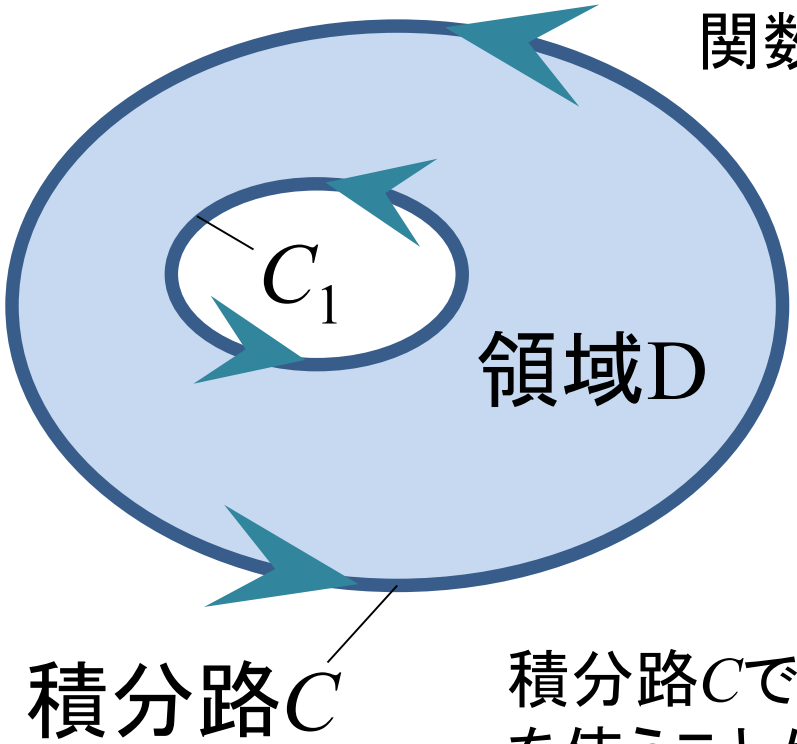
z_2によらずに成り立つ→ $$=\int_{z_0}^{z_1} f(s)ds$$

以上で定積分の公式が証明された

6） $F'(z)=f(z)$ ならば, $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1)-F(z_0)$ (8.4)

（$F(z)$を$f(z)$の不定積分と呼ぶ）

多重連結領域の積分路



関数$f(z)$が領域Dで正則であるとする.

$f(z)$を積分路Cで周回積分する場合を考える.

積分路Cの内部に正則ではない領域があるので，周回積分は0になるとは限らない.（コーシーの積分定理は成り立たない.）

積分路Cでの積分を実行する場合,次の関係を使うことができる

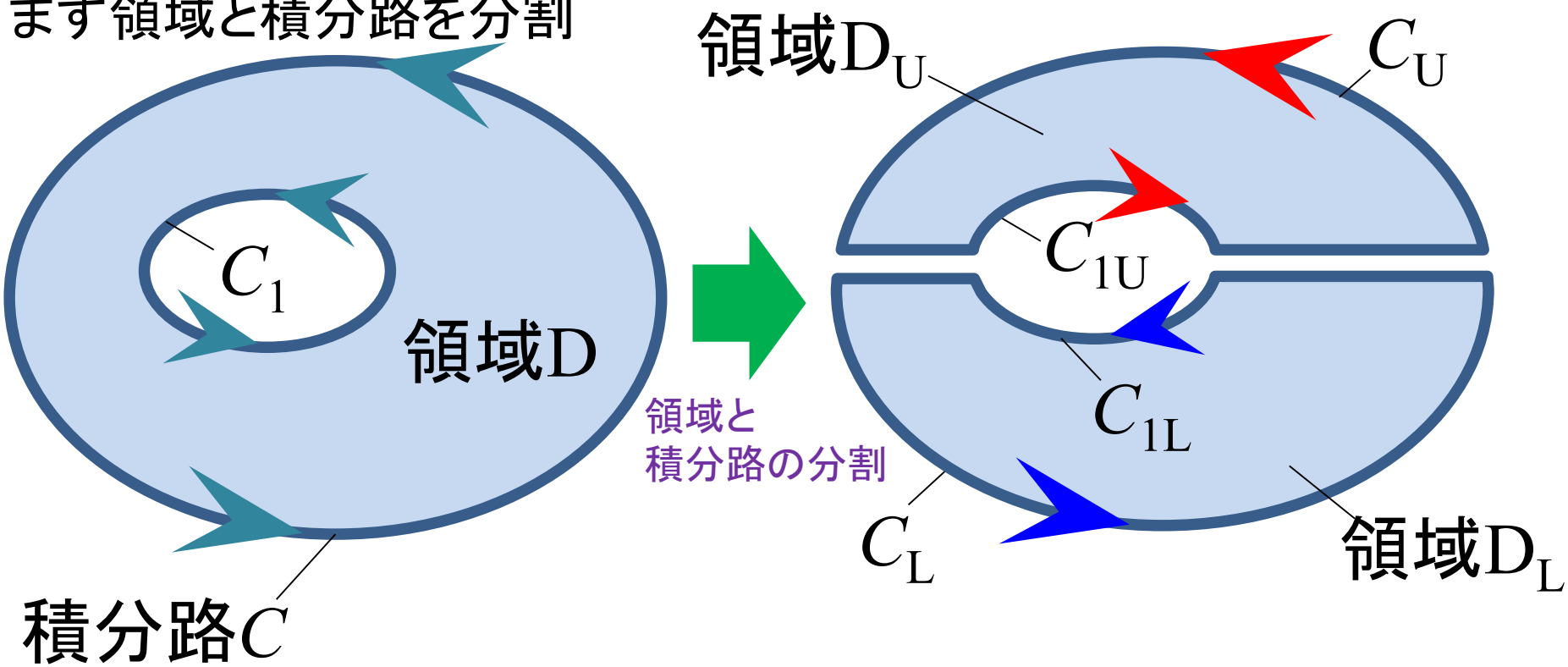
$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz}$$

内側の積分路C_1に積分路を変更しても積分値は変わらない.

内側の積分路C_1に積分路を変更しても積分値は変わらないこと,

すなわち, $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz$ の証明

まず領域と積分路を分割



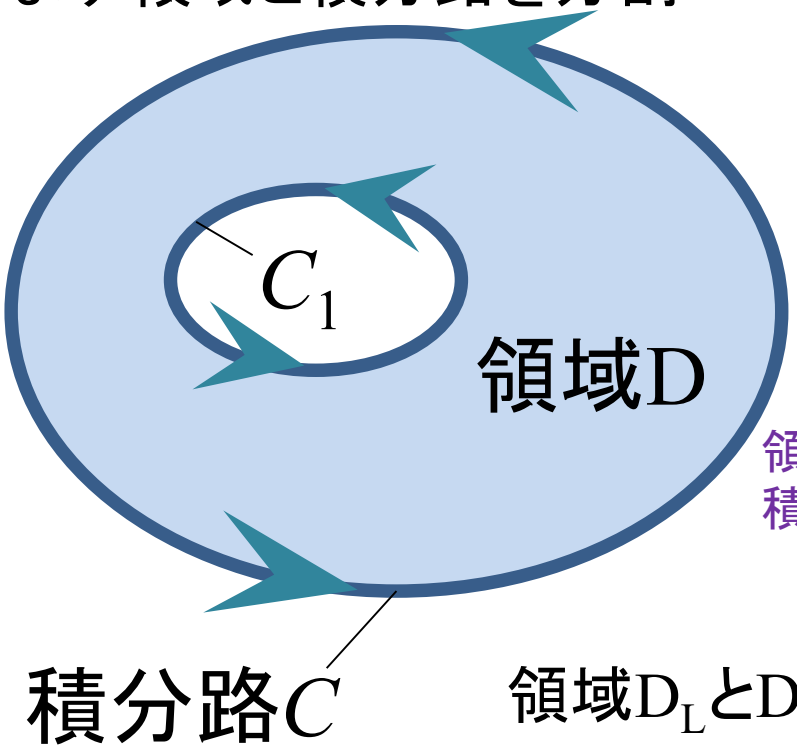
$$C = C_L + C_U$$

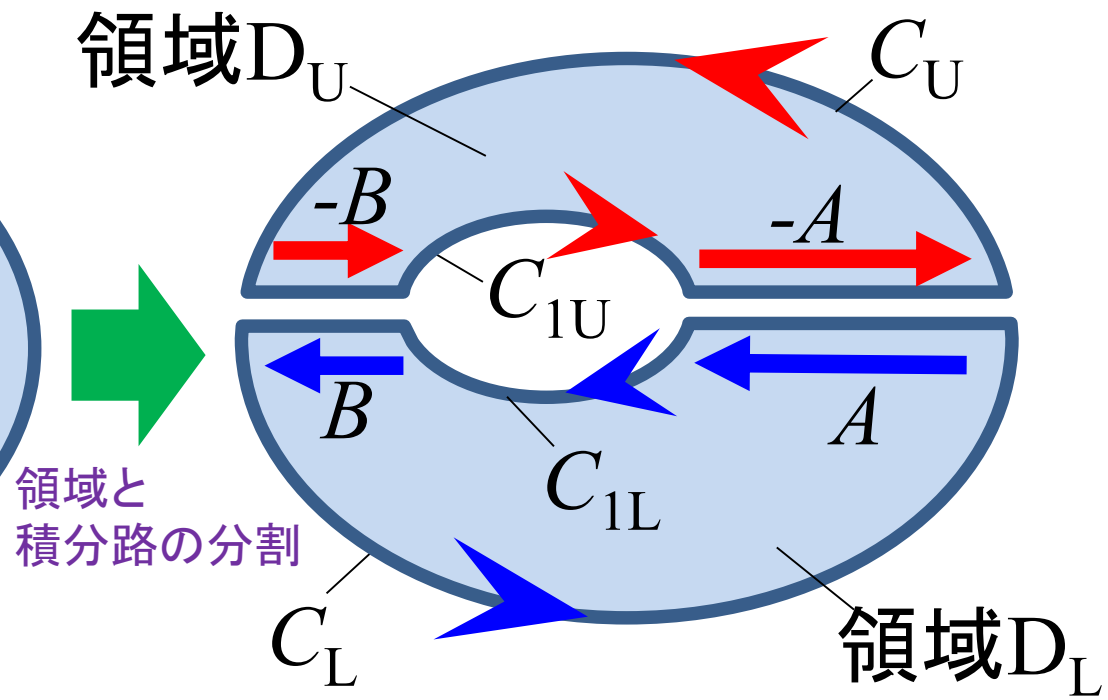
$$-C_1 = C_{1L} + C_{1U}$$ （方向が逆なのでマイナス）

内側の積分路C_1に積分路を変更しても積分値は変わらないこと,

すなわち, $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz$ の証明

まず領域と積分路を分割





領域D_LとD_Uを囲む積分路C_{DL}とC_{DU}は

$$C_{DL} = C_L + A + C_{1L} + B$$

$$C_{DU} = C_U - B + C_{1U} - A$$

内側の積分路C_1に積分路を変更しても積分値は変わらないこと,

すなわち, $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz$ の証明

よって,

$$C_{DL}+C_{DU}=C_{\mathrm{L}}+C_{\mathrm{U}}+\underline{C_{1\mathrm{L}}+C_{1\mathrm{U}}}$$

$$=C+(-C_1)$$

方向が逆なので
マイナス符号

周回積分で表すと,

$$\int_{C_{DL}} + \int_{C_{DU}} = \int_C + \int_{-C_1}$$

積分路C_{DL}とC_{DU}の内部(領域$\mathrm{D_L}$,$\mathrm{D_U}$)は正則なので
コーシーの積分定理から周回積分はそれぞれ0となり, 上式の左辺は0となる.

内側の積分路C_1に積分路を変更しても積分値は変わらないこと,

すなわち, $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz$ の証明

よって,

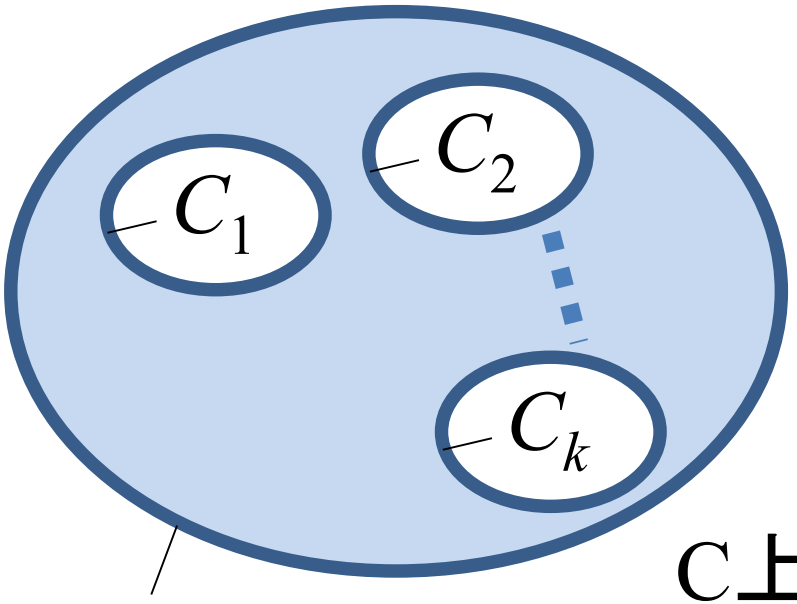
$$0 = \int_C \quad + \int_{-C_1} \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = \int_C \quad - \int_{C_1}$$

$$\Leftrightarrow \int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz$$

3重連結領域の場合は2か所で分割して同様に求めると,

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

多重連結領域の積分路



単一閉曲線Cの内部に

単一閉曲線$C_1, C_2, .., C_k$があり,

Cと$C_1, C_2, .., C_k$の間の領域と,
境界で$f(x)$が正則である場合,

C上の積分は,個々の単一閉曲線
上の積分の和に等しい.

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz \cdots + \int_{C_k} f(z)dz}$$

(9.6)

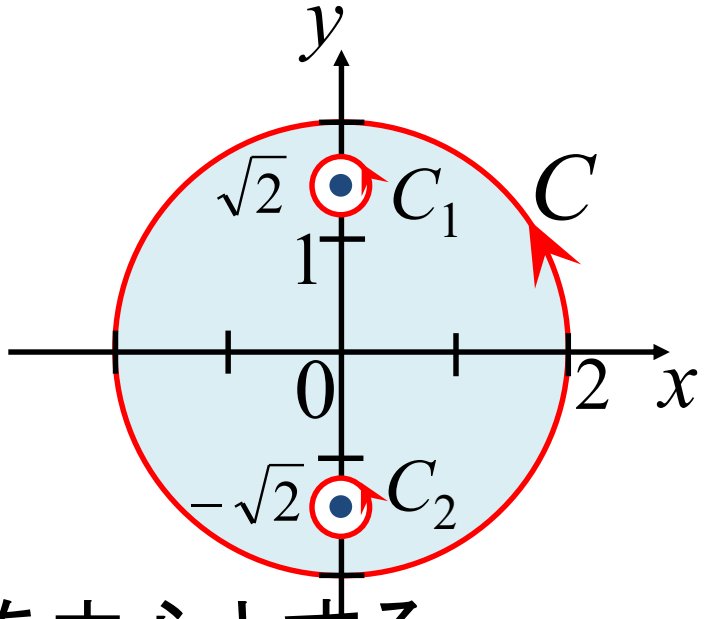
例題９．２

$$f(z)=\frac{2z}{z^2+2}$$

を積分路C: $|z|=2$ で積分せよ

解）　部分分数分解すると

$$f(z)=\frac{1}{z+\sqrt{2}i}+\frac{1}{z-\sqrt{2}i}$$



正則でない点は　$z=\pm\sqrt{2}i$

で積分路内にある．そこで

式(9.6)よりCを$z=i\sqrt{2}$と$z=-i\sqrt{2}$ を中心とする

小円の積分路C_1,C_2に変更する．式(8.6)を使うと

積分値は

$2\pi i+2\pi i=4\pi i$　と求まる．■

$$\int_C (z-z_0)^m dz=\begin{cases}2\pi i & (m=-1)\\ 0 & (m\neq -1)\end{cases}$$

部分分数分解ができない場合は？

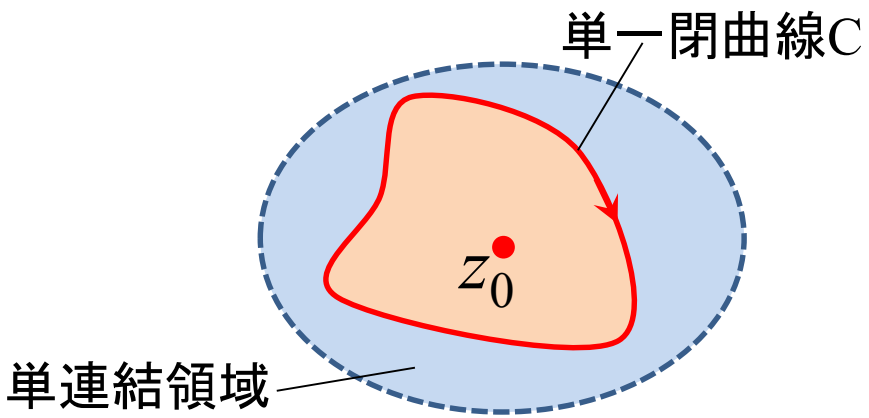
- $1/(z-z_0)$の形にきれいに部分分数分解できれば，積分範囲に含まれる特異点の数×$2\pi i$で周回積分の値が求まる
- 部分分数分解がきれいにできない場合を含め，一般に(正則でない点を含む)複素関数の周回積分を計算する方法を次に紹介する
- まずはべき関数を分母に含む形から

コーシーの積分公式

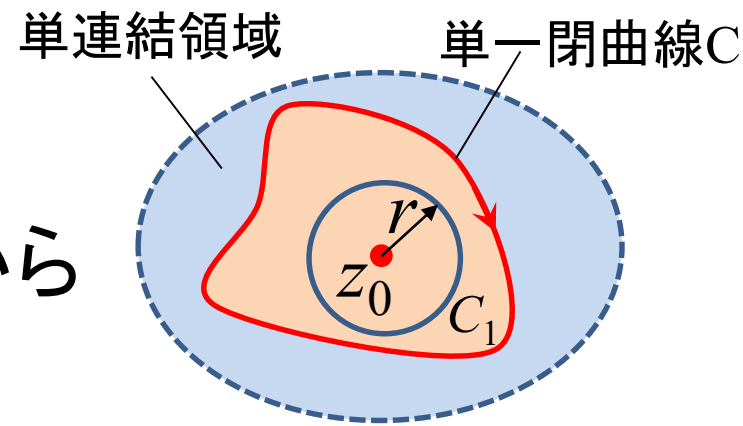
$f(z)$が単連結領域で正則ならば,
点z_0を囲む単一閉曲線Cに対して,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz \qquad (10.1)$$

が成り立つ.



証明）



C内に,中心z_0,半径rの小円からなる閉曲線C_1を考える.

式(9.6)で示された積分路の変更定理を使うと

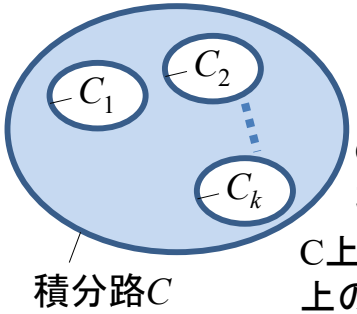
積分路をCからC_1へ変更できる.

C_1の媒介変数表示:

$$z = z_0 + re^{it}$$

$$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

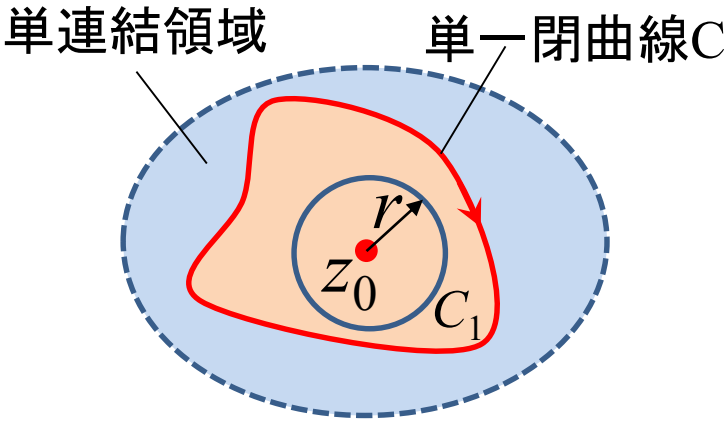
多重連結領域の積分路



単一閉曲線Cの内部に単一閉曲線$C_1, C_2, .., C_k$があり,
Cと$C_1, C_2, .., C_k$の間の領域と,境界で$f(x)$が正則である場合,
C上の積分は,個々の単一閉曲線上の積分の和に等しい.

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz \cdots + \int_{C_k} f(z)dz \tag{9.6}$$

証明）

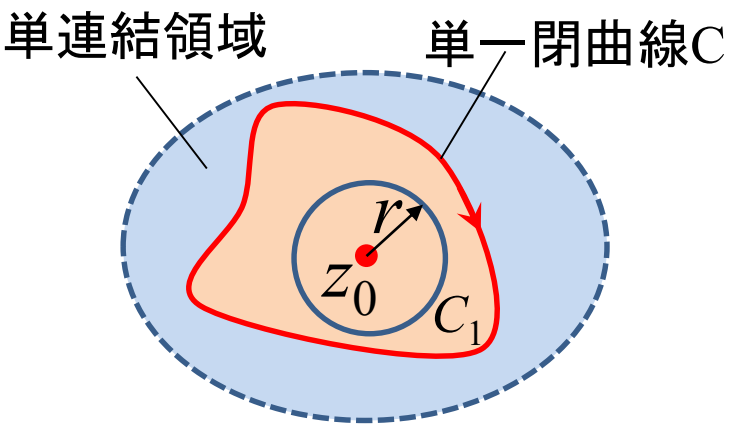


C_1の媒介変数表示:

$$z = z_0 + re^{it}$$

$$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

証明）



C_1の媒介変数表示：

$$z = z_0 + re^{it}$$

$$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

dz/dtより，

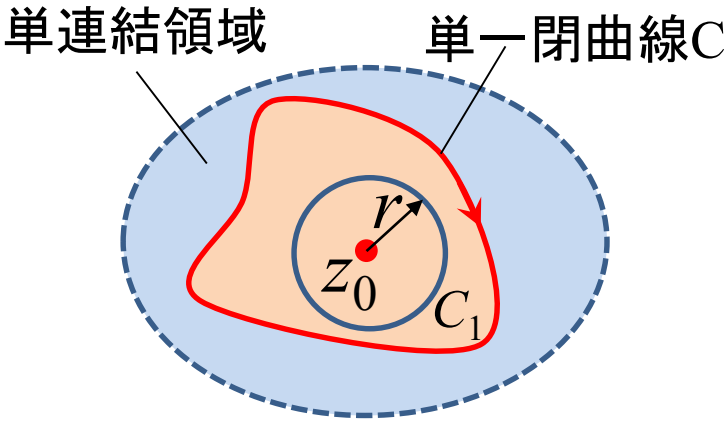
$$dz = ire^{it}dt$$ である．

次に，$z=z_0$で非正則となる関数 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ を考え，

積分路C_1で積分すると,積分路Cでの積分と等しく

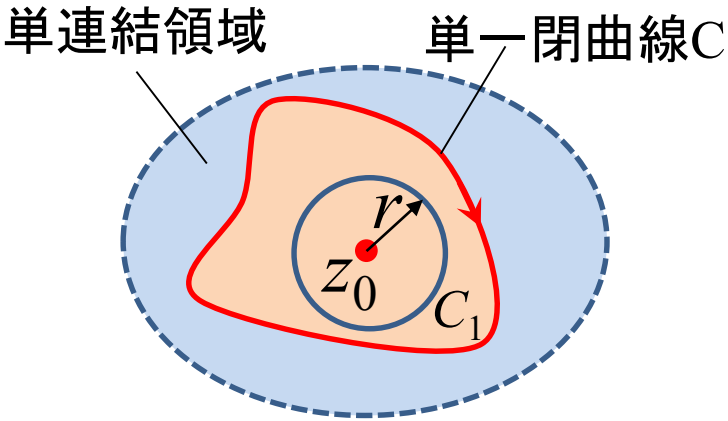
$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}dt = i\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})dt$$

証明）



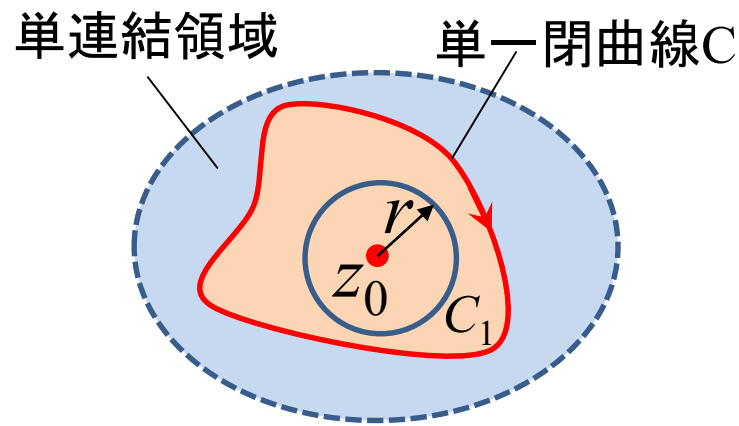
$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{\cancel{re^{it}}} i\cancel{re^{it}}\,dt = i\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})dt$$

証明）



$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = i\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt$$

証明）



$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = i\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})dt$$

$f(z)$は連続なので，C_1の半径(>0)を十分小さくすると積分値は半径rによらない次式となる

$$\int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \lim_{r\to+0} i\int_0^{2\pi} f(z_0+\cancel{re^{it}})dt = \lim_{r\to+0} i\int_0^{2\pi} \underline{f(z_0)}dt$$

$$= i\cdot f(z_0)\boxed{\int_0^{2\pi} dt} = \boxed{2\pi}\, i\cdot f(z_0)$$

以上からコーシーの積分公式が導かれた. ■

$$\boxed{2\pi i f(z_0) = \int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz} \qquad (10.1)$$

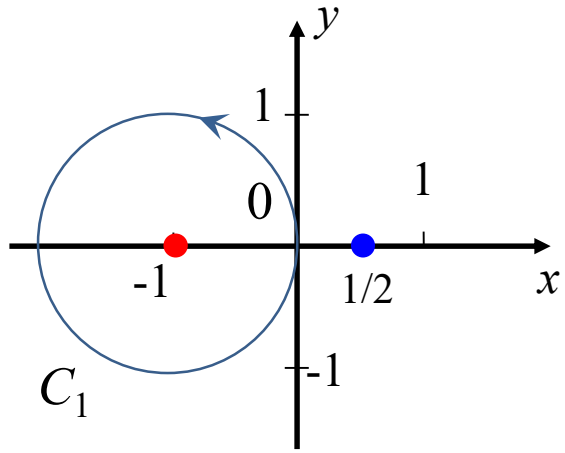
コーシーの積分公式

$$\boxed{2\pi i f(z_0) = \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz} \qquad (10.1)$$

- 右辺の積分値はz_0における関数値$f(z_0)$より求まり，実際に積分を実行する必要がない.
- この公式は，被積分関数の分母を$(z-z_0)$の形にでき，その他の部分$f(z)$が正則関数である場合に使える.

例1）$g(z)=\dfrac{3z}{(z+1)(2z-1)}$ を次の積分路で積分せよ.

$$C_1 : |z+1| = 1$$



解）　$g(z)$が正則でない点は$z=-1,\ 1/2$ である．そのうち，

積分路C_1内の非正則点は，$z=-1$ だから，$g(z)=\dfrac{3z/(2z-1)}{(z+1)}$

と変形すると，$f(z)=\dfrac{3z}{2z-1}$ となる．コーシーの積分公式より

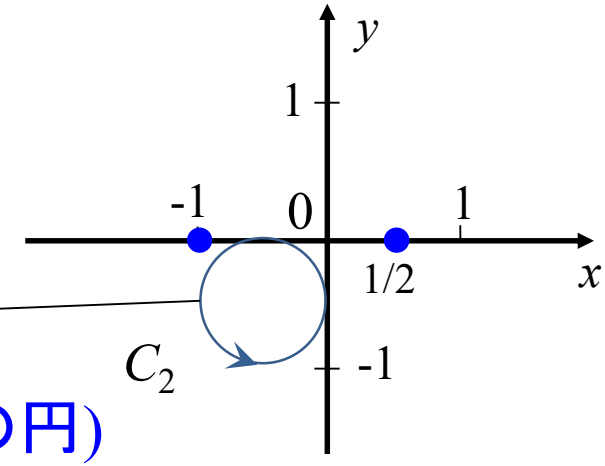
$$2\pi i f(z_0)=\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

積分値は，$2\pi i\cdot f(-1)=2\pi i\cdot\dfrac{3\times(-1)}{2\times(-1)-1}=\underline{2\pi i}$ (答)

となる．

例2) $g(z)=\dfrac{3z}{(z+1)(2z-1)}$ を次の積分路で積分せよ.

(非正則点 : $z=-1,\ 1/2$)



$$C_2 : |2z+1+i| = 1$$

(中心 $z=-1/2-i/2$, 半径1の円)

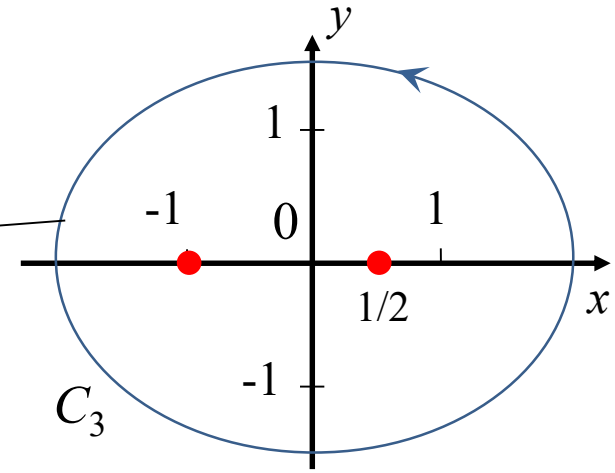
解)

積分路C_2内に非正則点は存在しないので,

コーシーの積分定理より積分値は 0 (答)

例3）$g(z)=\dfrac{3z}{(z+1)(2z-1)}$ を次の積分路で積分せよ.

$$C_3 : |z+1|+|z-1|=4$$



解）　$g(z)$が正則でない点は $z=-1,\ 1/2$ である.

積分路C_3内には両方含むため積分路を変更して,

それぞれの点を含む小円としてコーシーの積分公式を使う.

$z=1/2$を含む小円の積分は$g(z)$の分母から2をくくりだして

$g(z)=\dfrac{3z}{(z+1)2(z-1/2)}$ と変形し $f(z)=\dfrac{3z}{2(z+1)}$ とする.

(例1で計算済)

積分値は両者の和だから $2\pi i\dfrac{3(1/2)}{2(1/2+1)}+2\pi i\boxed{\dfrac{3(-1)}{2(-1)-1}}=3\pi i$ (答)

注意）$g(z)=\dfrac{3z}{(z+1)(2z-1)}=\dfrac{3z}{(z+1)2(z-1/2)}$

のように，分母の$(2z-1)$から2をくくり出すべき理由

コーシーの積分公式

$$\boxed{\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)}$$

は，分母の$(z-z_0)$のzの係数が1の場合の公式.

もしも，zの前に係数aが付いていたら，

$$\int_C \frac{f(z)}{az-z_0}dz = \int_C \frac{f(z)}{a(z-z_0/a)}dz = \frac{1}{a}\boxed{\int_C \frac{f(z)}{z-z_0/a}dz}$$

最後の周回積分$\int_C$にコーシーの積分定理を適用すると，

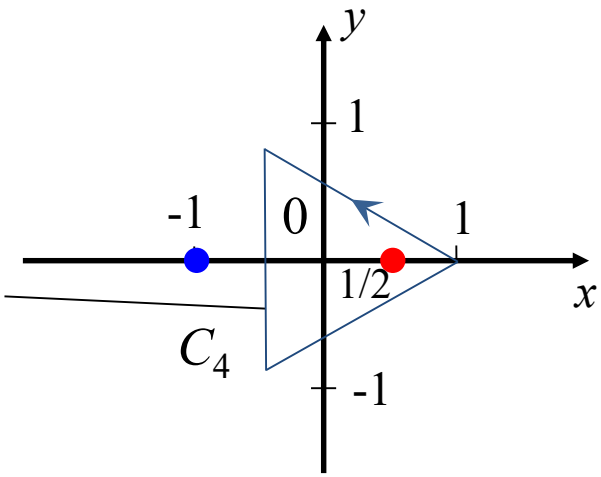
$$=\frac{1}{a}2\pi i f(z_0/a)$$

と,積分結果は$1/a$倍になってしまう.

例4) $g(z)=\dfrac{3z}{(z+1)(2z-1)}$ を次の積分路で積分せよ.

C_4: 1の3乗根を頂点とする正三角形

$\left(1, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$



解) $g(z)$が正則でない点は $z=-1, 1/2$ であるが,

積分路C_4内には非正則点 $z=1/2$ のみ含むため,

例3で求めたとおり, $2\pi i\dfrac{3(1/2)}{2(1/2+1)} = \pi i$ (答)

となる.

例題10.1 (1)

$$g(z)=\frac{z^2}{z^2+1}$$ を,積分路C_1: $|z-i|=1$ で反時計回りに周回積分せよ.

解）

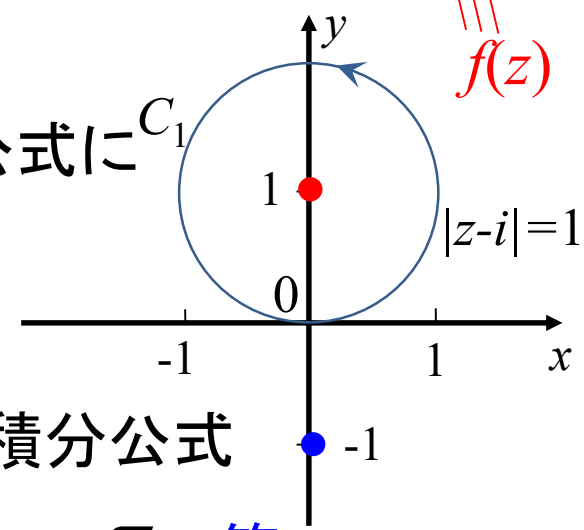
$g(z)$の分母を因数分解すると, $$g(z)=\frac{z^2}{(z-i)(z+i)}$$

$f(z)$

よって,C_1内で正則でない点は $z=i$ のみ.

分母の$(z-i)$をくくりだすと,コーシーの積分公式に

対応する $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+i)}$ はC_1内で正則.



よって, $z_0=i$ を $f(z)$に代入するとコーシーの積分公式より

$$\int_{C_1} g(z)dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{i^2}{i+i} = -\pi$$ (答)

例題10.1 (2)

$$g(z)=\frac{z^2}{z^2+1}$$ を,積分路C_2: $|z+i|=1$ で反時計回りに周回積分せよ.

解）

$g(z)$の分母を因数分解すると,

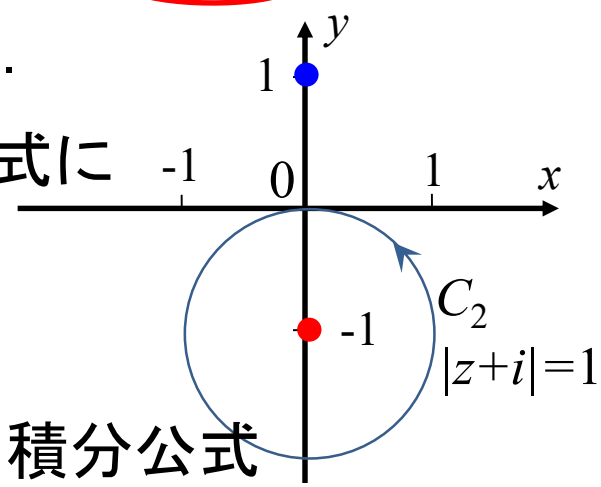
$$g(z)=\frac{z^2}{(z-i)(z+i)}$$

$=f(z)$

よって,C_2内で正則でない点は $z=-i$ のみ.

分母の$(z+i)$をくくりだすと,コーシーの積分公式に

対応する $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-i)}$ はC_2内で正則.



よって, $z_0=-i$ を $f(z)$に代入するとコーシーの積分公式より

$$\int_{C_2} g(z)dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i\frac{(-i)^2}{-i-i} = \pi$$ (答)

分母が$(z-z_0)^n$だったらどうするか？

- コーシーの積分公式は,

$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz}$$

- 分母がzの一次式の場合有効だが
- $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}dz$ のように, $n \geqq 2$の場合は使えない.
- $n \geqq 2$の場合に使える方法を紹介しよう！
- なんと$f(z)$の微分（導関数）の値から簡単に求まる, というのである. . .

正則関数の導関数

コーシーの積分公式

$$2\pi i f(z_0) = \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \qquad (10.1)$$

を, $f(z_0)=$ の形に変形すると,

$$\Leftrightarrow \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

この式をz_0の関数と見なして形式的にz_0で微分すると

(zと zの関数は定数と見なして,積分記号の内側を微分すると)

$$\boxed{\frac{df(z_0)}{dz_0} = f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz} \qquad (10.2)$$

導関数 $$\boxed{f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz} \qquad (10.2)$$

微分の定義に基づいた導出

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)\}$$

コーシーの積分公式を代入すると

$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz}$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi i}\int_C\left\{\frac{f(z)}{z-(z_0+\Delta z)}-\frac{f(z)}{z-z_0}\right\}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}dz \quad =\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

ここで，$\Delta z\to 0$ とすれば，

以上をまとめると，

1階の導関数の表式は,

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

上の式の$f(z_0)$を$f'(z_0)$に置き換えて同様の手順で計算すると

2階の導関数$f''(z_0)$が計算できて,

$$f''(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f'(z_0+\Delta z)-f'(z_0)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi i}\int_C\left\{\frac{f(z)}{(z-z_0+\Delta z)^2}-\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right\}dz$$

$$=\frac{2!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz$$

一見，4乗になりそうだが，分子に$(z-z_0)$が1つ出てくるので，結局3乗になる.

同様にして次々に高階の導関数を求めることができるので

次の公式が成り立つ.

グルサの公式

$f(z)$が領域Dで正則ならば
すべての階数の導関数を持ち
領域D内の点z_0におけるn次導関数の値は
z_0を囲む単一閉曲線Cにより，次の式で与えられる.

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz} \quad (n=1,2,....) \qquad (10.3)$$

または，

$$\boxed{\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)}$$

これをグルサの公式という.

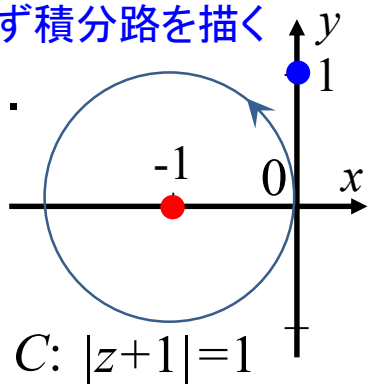
任意階数の導関数が1回の周回積分で求められる.
逆に，左辺の任意階数の導関数を，別途導関数の公式から計算してしまえば，
右辺の周回積分の値が(実際に積分することなく)求められたことになる.

例）$g(z)=\dfrac{z-1}{(z-i)(z+1)^2}$ $\equiv f(z)$

を,積分路C: $|z+1|=1$ で反時計回りに積分せよ.

次に，積分路内の非正則点を見つける.

まず積分路を描く



解）閉曲線C内で正則でない点は $z=-1$ のみ.

($z=i$ はCの外部)

そこで,分母の$(z+1)$の項をくくり出すと, 求める積分は

$$\int_C g(z)dz=\int_C \frac{f(z)}{(z+1)^2}dz \quad \text{ただし,} \quad f(z)\equiv\frac{z-1}{z-i}$$

グルサの公式(10.3)のn=1を使うため左辺の1階導関数を計算すると,

$$f'(z)=\frac{1-i}{(z-i)^2} \quad \text{よって} \quad f'(-1)=\frac{1-i}{(-1-i)^2}=-\frac{1+i}{2} \quad \text{より}$$

グルサの公式(n=1)に代入すると

$$\int_C g(z)dz=2\pi i f'(-1)=2\pi i\left(-\frac{1+i}{2}\right)=\underline{(1-i)\pi}$$ (答)

例題10.2　複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{(z+i)^3}dz$

を,積分路 C: $|z+i|=1$ で反時計回りに積分せよ.

積分路内の非正則点を見つける.

解）与式の積分において,C内の非正則点は $z=-i$.

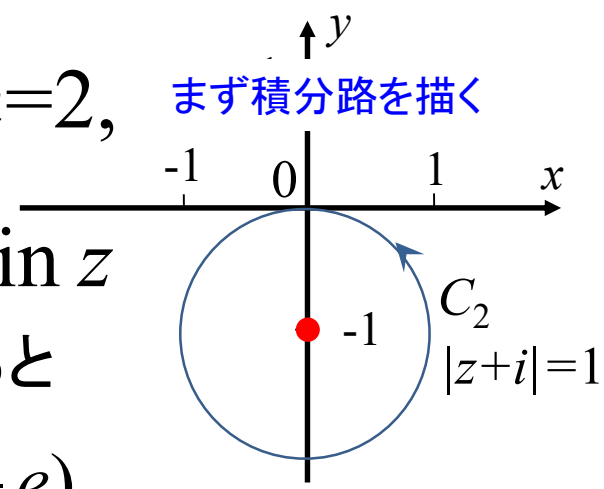
ここでグルサの公式(10.3)を積分を求める形に変形

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

グルサの公式に当てはめると $z_0=-i$, $n=2$,

$f(z)=\sin z$,

2階の微分を使うので $f'(z)=\cos z,\ f''(z)=-\sin z$



これらをグルサの公式を変形した式に代入すると

$$\int_C \frac{\sin z}{(z+i)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(-i) = \frac{\pi}{2}(e^{-1}-e)$$

(答)

正則関数の性質

特筆すべき定理を2つ紹介する

モレラの定理

$f(z)$が単連結領域Dで連続で,
D内の任意の閉曲線Cに対して

$$\int_C f(z)dz = 0$$

が成り立てば, $f(z)$はDで正則である.

コーシーの積分定理

(逆の関係)

関数$f(z)$が, 単連結領域Dで正則ならば,
D内の単一閉曲線Cに対して, 次式が成り立つ.

$$\int_C f(z)dz = 0 \qquad (9.4)$$

リュービルの定理

$f(z)$が $|z|<\infty$ に対して正則でかつ有界,すなわち

$|f(z)|\leqq \mathrm{M}$ となる定数Mが存在するならば

$|f(z)|$は定数である.

たとえば $f(z)=z^2$ は正則関数だが, $|f(z)|\leqq \mathrm{M}$なる定数は存在しないので,
本定理は成り立たず，実際に，$|f(z)|$は定数ではない.

これまでに本講義で扱った正則関数は，すべて，有界ではない．もしも

有界な正則関数が存在したら，それはただの定数でなければならない，というのが
本定理の主張である.

本定理は，グルサの公式(10.3)とML不等式から導かれる.

まとめ:本日の確認事項

- コーシーの積分定理を説明できる
- コーシーの積分定理を使った複素積分ができる
- 積分路を変更して積分することができる
- 多重連結領域を単連結領域に分割することができる
- 多重連結領域での積分を計算できる
- コーシーの積分公式を説明できる
- コーシーの積分公式を使って複素積分が計算できる
- グルサの公式を使って複素積分が計算できる
- モレラの定理を説明できる
- リューヴィルの定理を説明できる

Appendix 1

グリーンの定理の証明

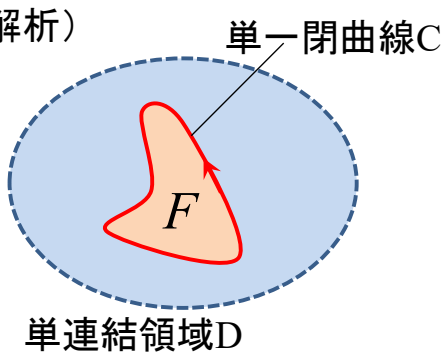
グリーンの定理は，２次元平面における閉路上の線積分と面積分の関係を与える定理であり，ベクトル解析で証明される．（３次元空間ではストークスの定理に対応）

(グリーンの定理)

2次元実数平面上の領域D内の単一閉曲線Cと，Cで囲まれた領域をFとする．

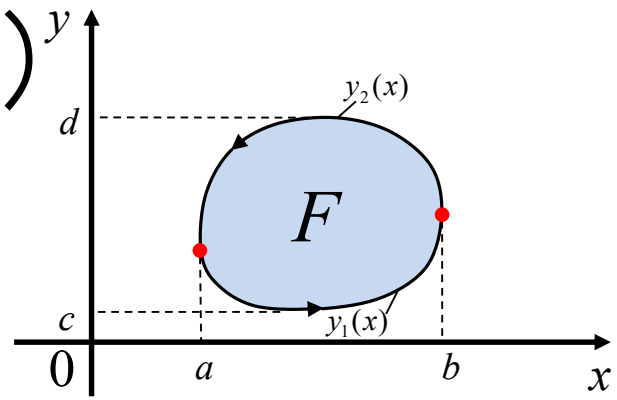
F内の2つの実関数P(x,y), Q(x,y)に対して,次のグリーンの定理が成り立つ．（証明はベクトル解析）

$$\underbrace{\int_C (Pdx + Qdy)}_{\text{線積分}} = \underbrace{\iint_F \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy}_{\text{面積分}} \quad (9.1)$$

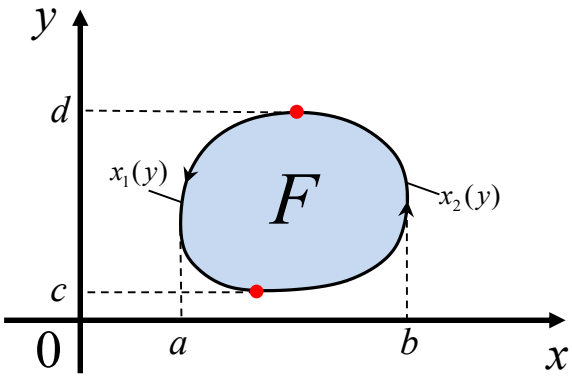


グリーンの定理の証明

証明）



赤い点を境に上側の曲線を
$y_1(x)$, 下側の曲線を$y_2(x)$とする



赤い点を境に左側の曲線を
$x_1(y)$, 右側の曲線を$x_2(y)$とする

はじめに,領域Fが，上の図のように,

x座標の範囲 $a \le x \le b$ で $y_1(x) \le y \le y_2(x)$

y座標の範囲 $c \le y \le d$ で $x_1(y) \le x \le x_2(y)$

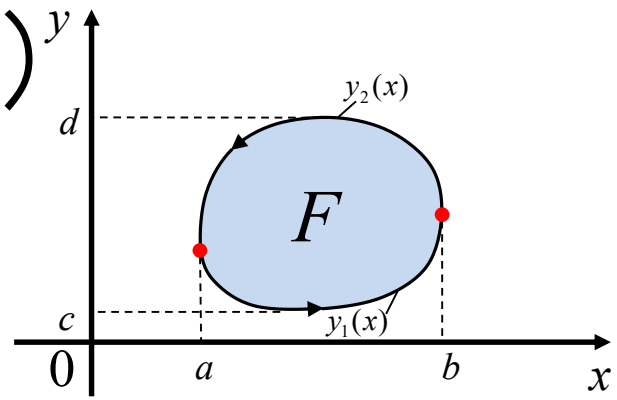
と表される場合について示す．このとき,

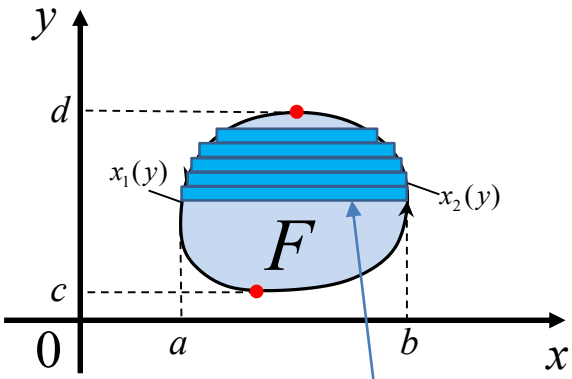
x で偏微分可能な任意の実関数を$Q(x,y)$として,

$\frac{\partial Q}{\partial x}$ を領域Fで面積分することを考える.すなわち,

グリーンの定理の証明

証明）





$$\iint_F \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx$$

まず,ある点yに注目(固定)し,
x方向に境界$x_1(y)$から境界$x_2(y)$まで $\frac{\partial Q}{\partial x}$ を積分する.
それにdyを掛けて, 横に細長いリボンの面積とし,
このリボンの面積を $y=c\to d$ まで加算する.

$$= \int_c^d dy \left[Q \right]_{x_1(y)}^{x_2(y)}$$

$$= \int_c^d \{ Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y) \} dy$$

逆転

$$= \int_c^d Q(x_2(y), y) dy + \int_d^c Q(x_1(y), y) dy$$

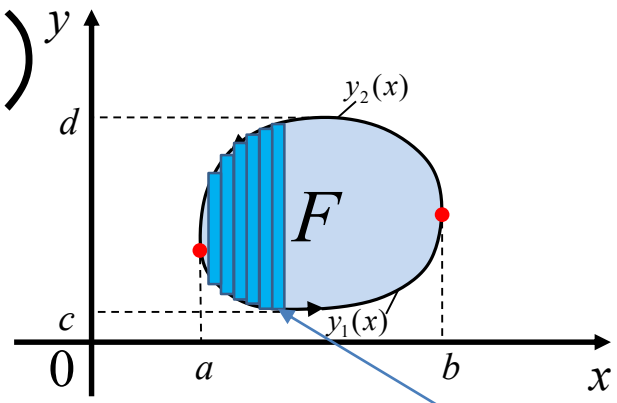
反時計回りに「周回」した
ことになっている！

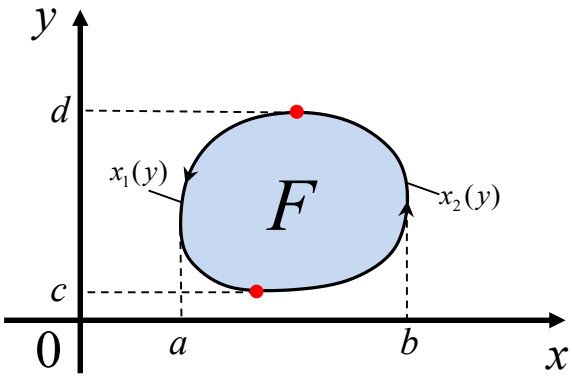
$$= \int_C Q(x, y) dy$$

ただし,Cは領域Fを囲む単一閉曲線を表すものとする.

グリーンの定理の証明

証明）





同様に今度は y で偏微分可能な任意の実関数を $P(x,y)$ とすると，

$$-\iint_F \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy$$

まず，ある点 x に注目(固定)し，
y 方向に境界 $y_1(x)$ から境界 $y_2(x)$ まで $\frac{\partial P}{\partial y}$ を積分する．
それに dx を掛けて，縦に細長いリボンの面積とし，
このリボンの面積を $x = a \to b$ まで加算する．

$$= -\int_a^b \{P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\}dx$$

逆転

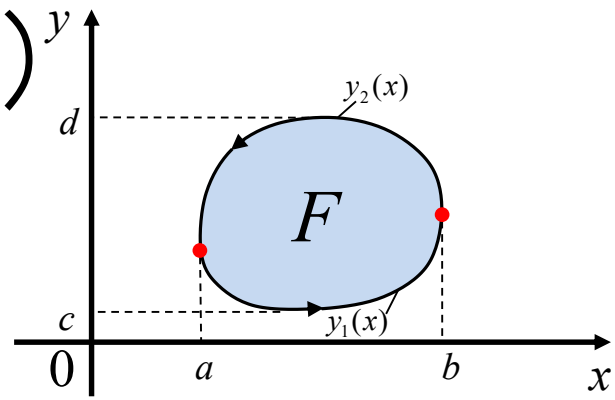
$$= \int_a^b P(x, y_1(x))dx + \int_b^a P(x, y_2(x))dx$$

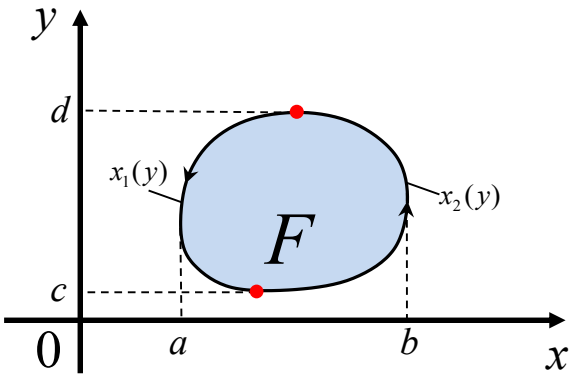
反時計回りに「周回」したことになっている！

$$= \int_C P(x, y)dx$$

グリーンの定理の証明

証明）





両辺を加算すると,

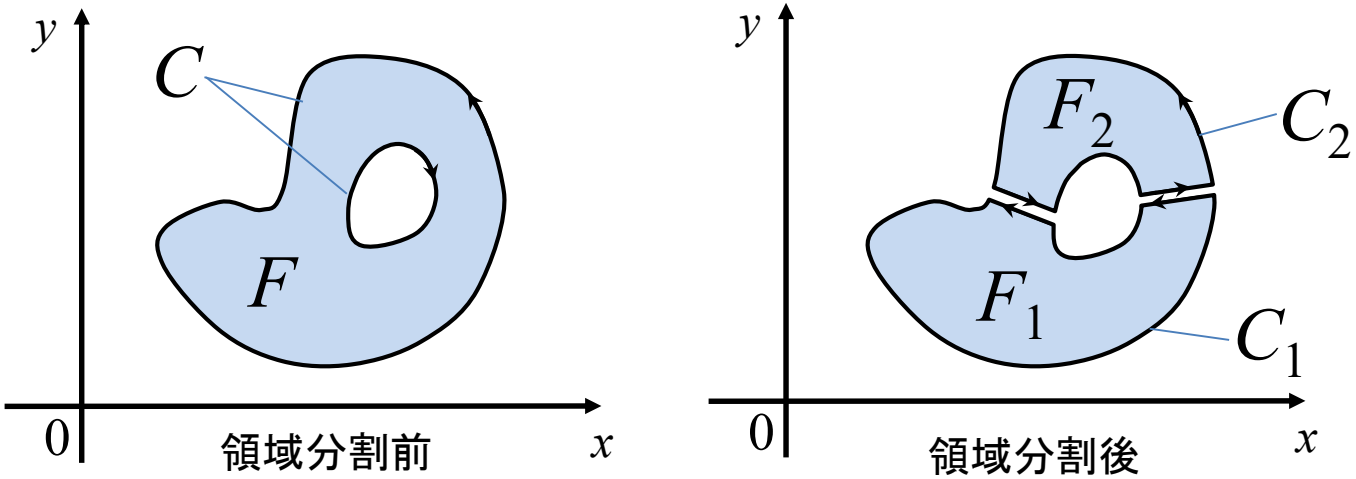
$$\boxed{\int_C P dx + \int_C Q dy = \iint_F \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy}$$

以上で単連結領域については定理が証明された.

一般の多重連結領域については,次のように考える.

グリーンの定理の証明

証明）



上図のように領域をF_1,F_2に分割すると,それぞれの領域は単連結領域なのでそれぞれグリーンの定理が成り立ち,

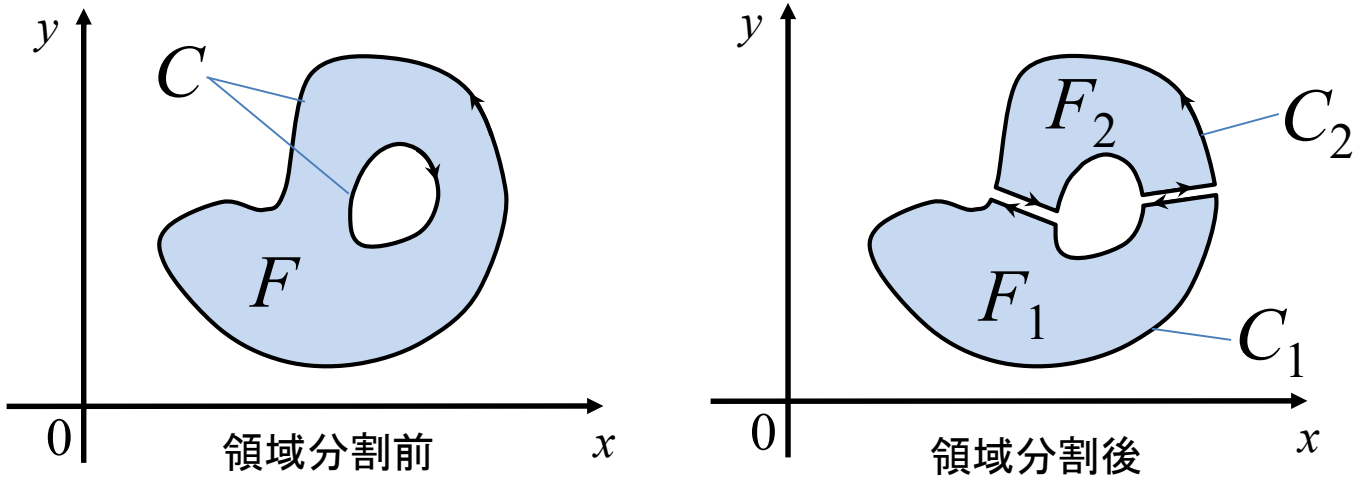
$$\int_{C_1} Pdx + \int_{C_1} Qdy = \iint_{F_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$\int_{C_2} Pdx + \int_{C_2} Qdy = \iint_{F_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

ただし，外側と内側の積分路で,線積分の周回方向を逆に定義していることに注意する.

グリーンの定理の証明

証明）



分割された２つの領域同士が接している線上では矢印の向き(線積分の方向)が逆なので,線積分の値が打ち消しあうことから,閉曲線については

$$C=C_1+C_2$$

また,領域については

$$F=F_1+F_2$$

ただし，全体の積分路Cは,周回方向を反時計回りを正(＋)と定義すると,

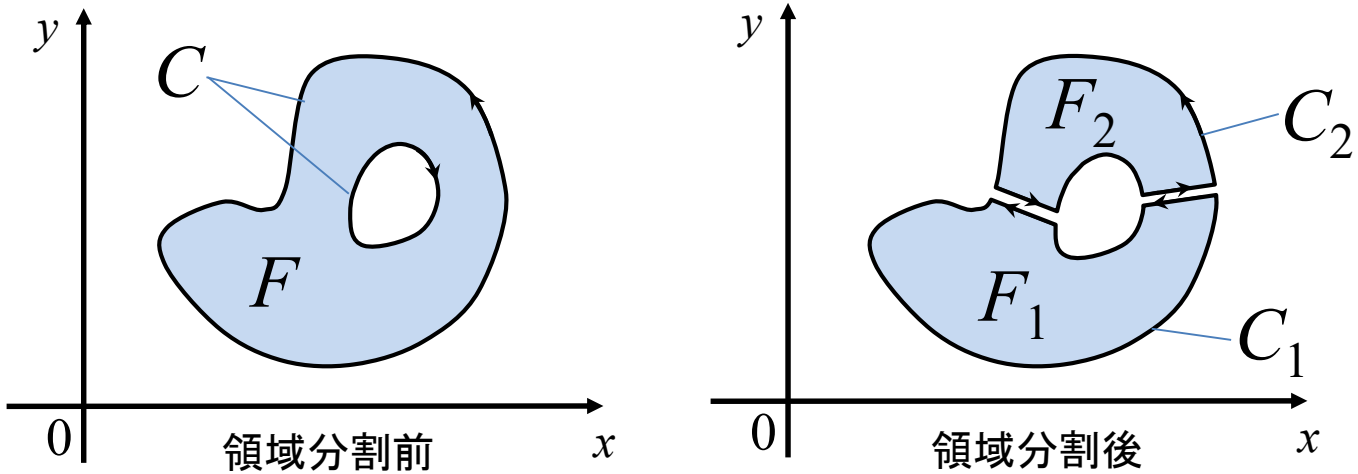
$C=C_{外側}-C_{内側}$

と定義されている.これがC_1+C_2に等しい.

が成り立つので,それぞれの領域で成り立つ式を辺々加えると

グリーンの定理の証明

証明）



$$\int_{C_1} Pdx + \int_{C_1} Qdy + \int_{C_2} Pdx + \int_{C_2} Qdy = \iint_{F_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \iint_{F_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\int_C Pdx} + \boxed{\int_C Qdy} = \iint_F \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

以上より,一般の領域についてもグリーンの定理が示された.

ただし, 複数ある閉曲線積分路の周回方向(符号)に注意が必要.

グリーンの定理(補足)

$$\begin{cases} \displaystyle\int_C Q(x,y)dy = \iint_F \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy \\ \displaystyle\int_C P(x,y)dx = -\iint_F \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \end{cases}$$

x方向とy方向の積分に関する独立な式を２つ並べて(辺々加算せずに),これを「グリーンの定理」という場合もある.