解析学　演習４　解答例

4.1　　$z=x+iy$ のとき，$f(x,y)=2xy+iy^2$ が微分可能か定義式を用いて調べよ．

(解答例)

$z=x+iy$ の下で $w(z)=f(x,y)$ の時，$z+\Delta z=x+iy+\Delta x+i\Delta y=(x+\Delta x)+i(y+\Delta y)$であるから $w(z+\Delta z)=f(x+\Delta x,y+\Delta y)$ としてよい．これを用いて，微分の定義式から

$$\frac{w(z+\Delta z)-w(z)}{\Delta z}=\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta z}=\frac{2(x+\Delta x)(y+\Delta y)+i(y+\Delta y)^2-2xy-iy^2}{\Delta x+i\Delta y}$$

・・・(☆)

ここで，$z=x+iy$，$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ から $z+\Delta z=x+\Delta x+i(y+\Delta y)$などを用いた．

ここでまず最初に，$\Delta y\to 0$ にしてから $\Delta x\to 0$ にもっていく場合を考える．

まず $\Delta y\to 0$ で $\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}\to\dfrac{2(x+\Delta x)y+iy^2-2xy-iy^2}{\Delta x}=\dfrac{2y\Delta x}{\Delta x}=2y$

次に $\Delta x\to 0$ の操作を行うと(結局 Δx は消えてしまったので) $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=2y$

次に(☆)式において, 最初に $\Delta x\to 0$ を実行してから次に $\Delta y\to 0$ にもっていく場合を考えると まず $\Delta x\to 0$ で

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\frac{2x(y+\Delta y)+i(y+\Delta y)^2-2xy-iy^2}{i\Delta y}=\frac{2x\Delta y+i2y\Delta y+i\Delta y^2}{i\Delta y}=-i2x+2y+\Delta y$$

となるので,

そこから Δy→0 に近づけると $\displaystyle\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=2y-2ix$.

よって $z=0$ 以外($z\neq 0$)では値が定まらず微分不可能.
（本問の解答としてはここまで．以下参考.）

y 軸上を意味する $x=0$ においては，$2y = 2y-2ix$ が常に成立し，値が確定する．よって y 軸上でのみ微分可能.

本問は微分可能性を調べる問題だが，正則性について考察すると，「正則」であるためには一点あるいは一線上のみで微分可能ではだめで, その近傍の全ての点において微分可能であることが必要だから，与式は $x=0$ で「正則」とはいえない．ちなみにコーシー・リーマン方程式でも $W(z,\bar{z})$ の方法を用いても，正則関数でないことはすぐに確かめられる．

4.2　関数$\sin(iz)$が正則かを調べ，正則な場合は導関数を求めよ．

(解答例)

$\sin z$の定義式より，

$$\sin(iz)=\frac{e^{iiz}-e^{-iiz}}{2i}=\frac{1}{2i}(e^{-z}-e^{z})=i\cdot\sinh z=\frac{i}{2}(e^{x}e^{iy}-e^{-x}e^{-iy})$$

$$=\frac{1}{2}\left\{e^{x}(i\cos y-\sin y)-e^{-x}(i\cos y+\sin y)\right\}$$

$$=\frac{i}{2}\cos y(e^{x}-e^{-x})-\frac{1}{2}\sin y(e^{x}+e^{-x})$$

以上より，$u=-\frac{1}{2}\sin y(e^{x}+e^{-x})$，$v=\frac{1}{2}\cos y(e^{x}-e^{-x})$ ．

コーシー・リーマン（C.R.）方程式は,

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}\sin y(e^{x}-e^{-x})$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{2}\sin y(e^{x}-e^{-x})$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}\cos y(e^{x}+e^{-x})$,

$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}\cos y(e^{x}+e^{-x})$ より，成り立っているので正則.

導関数は $\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}\left\{-\sin y(e^{x}-e^{-x})+i\cos y(e^{x}+e^{-x})\right\}$

$$=\frac{i}{2}\left\{e^{x}(\cos y+i\sin y)+e^{-x}(\cos y-i\sin y)\right\}=\frac{i}{2}\left\{e^{x}e^{iy}+e^{-x}e^{-iy}\right\}=i\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

$=\underline{i\cdot\cosh z\quad\text{(答)}}$

（導関数は, $\sin z$の微分が$\cos z$であることと,合成関数の微分，さらに$\cos(iz)=\cosh z$を使っても解ける.）

4.3　$f(x,y)=x^2-y^2+i2xy$の正則性を$W(z,\bar{z})$の方法で判定せよ．

(解答例)

$x=\frac{z+\bar{z}}{2}$，$y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ を$f(x,y)$の式に代入すると，

$$x^2-y^2+i2xy=\frac{1}{4}(z^2+2z\bar{z}+\bar{z}^2)-\frac{1}{-4}(z^2-2z\bar{z}+\bar{z}^2)+2i\frac{z^2-\bar{z}^2}{4i}$$

$=\frac{1}{4}(2z^2+2\bar{z}^2+2z^2-2\bar{z}^2)=z^2$ だから $\frac{\partial W(z,\bar{z})}{\partial\bar{z}}=0$ となり正則.

4.4 関数 $\dfrac{(1+iz^2)^3}{z}$ の導関数 $f'(z)$ を求めよ.

(解答例)

$$\left\{(1+iz^2)^3\right\}' = (1+3iz^2-3z^4-iz^6)' = 6iz-12z^3-6iz^5,$$ (合成関数の微分を使ってもよい)

$$\left\{\frac{(1+iz^2)^3}{z}\right\}' = \frac{6iz^2-6iz^6-12iz^4}{z^2} - \frac{1+3iz^2-3z^4-iz^6}{z^2}$$

$$= \frac{-9z^4-1}{z^2} + i\frac{3z^2-5z^6}{z^2} = -\frac{9z^4+1}{z^2} - i(5z^4-3)$$

4.5 関数 $u = e^x \cos y$ が調和関数かを調べ，調和関数の場合は u を実部とする正則関数 $f(z)$ を求めよ.

(解答例)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cos y, \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos y$$ より,

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ を満たすので調和関数.

調和関数の虚部を求める式(7.3)より， $v = \displaystyle\int \frac{\partial u}{\partial x} dy + c(x) = e^x \sin y + c(x)$

この式を x で偏微分すると $\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y + c'(x)$ ・・・①. 一方, C.R.方程式より $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

でなければならないから, 与式の u を y で偏微分した式 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$ より, 右辺同士

を等しいと置いて $\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$ ・・・②

以上①＝②より $c'(x)=0$ とわかる. したがって, $c(x)=k$ (定数). 以上より $f=u+iv$ を求め最終的に z の関数で表すと,

$$f(z) = e^x \cos y + i(e^x \sin y + k) = e^x \cos y + ie^x \sin y + ik = e^x(\cos y + i \sin y) + ik$$
$$= e^x e^{iy} + ik = e^z + ik$$

複素定数 ik をあらためて k' とおきなおすと, $f(z)=e^z+k'$ としてもよい.