

解析学 演習問題3 解答例

3.1 z 平面上の円 $|z-1|=1$ の, 関数 $w=\frac{1}{z}$ による w 平面上の写像を示せ. (配点:20 点)

(解答例)

$$|z-1|=1 \Leftrightarrow |z-1|^2=1 \Leftrightarrow (z-1)\overline{(z-1)}=1 \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1)=1$$

$$\text{ここに } w=\frac{1}{z} \Leftrightarrow z=\frac{1}{w} \text{ を代入すると, } \Leftrightarrow \left(\frac{1}{w}-1\right)\left(\frac{1}{\bar{w}}-1\right)=1$$

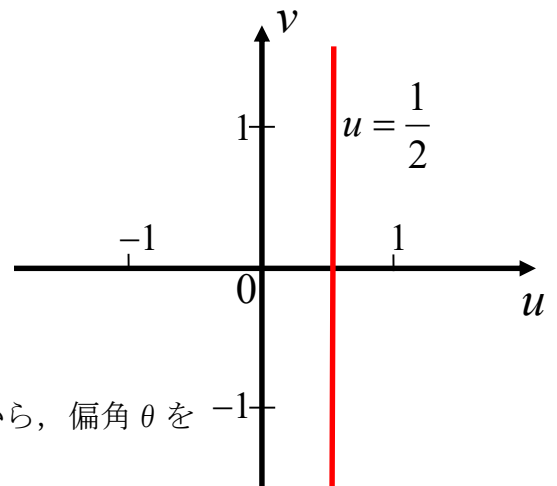
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-w}{w}\right)\left(\frac{1-\bar{w}}{\bar{w}}\right)=1 \Leftrightarrow (1-w)(1-\bar{w})=w\bar{w} \Leftrightarrow 1-w-\bar{w}+w\bar{w}=w\bar{w}$$

$$\Leftrightarrow w+\bar{w}=1$$

$$\text{ここで, } w=u+iv \text{ とおいて } w \text{ に代入すると, } \Leftrightarrow (u+iv)+(u-iv)=1 \Leftrightarrow 2u=1$$

$$\Leftrightarrow u=\frac{1}{2}$$

以上から, $u=\frac{1}{2}$ 一定で v 軸に平行な直線になる(右図).



(別解) オイラーの公式を用いた媒介変数表示による方法

z 平面上の $|z-1|=1$ は中心 $z=1$, 半径 1 の円周上にあるから, 偏角 θ を

用いて次のように表される. $z=1+e^{i\theta}$ (ただし $0 \leq \theta < 2\pi$) オイラーの公式を用いて

$z=1+\cos\theta+i\sin\theta$ よって z の逆数を取って写像 w の表式を θ を用いて表すと

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{1+\cos\theta+i\sin\theta}=\frac{1+\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}+i\frac{-\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\tan\frac{\theta}{2}$$

これより実部(u)は $1/2$ (一定)となることがわかる. また, 虚部(v)は $-\infty < v < \infty$ である.

この表記では, z の円周上と w における直線上の点と点の対応関係が直接把握しやすい.

仮に、実部、虚部の式が簡単な形に変形できない場合でも, u と v の関係を PC などで直接グラフにプロットして写像を可視化することが, 理解の助けになる場合も多い.

3.2 一次変換 $w = \frac{iz+1}{z-2i}$ による円 $|z|=1$ の写像を求め図示せよ. (配点:20 点)

(解答例)

$$w = \frac{iz+1}{z-2i} \text{ を } z \text{ について解くと, } z = \frac{2iw+1}{w-i}. \text{ これを } |z|=1 \text{ に代入すると } \left| \frac{2iw+1}{w-i} \right| = 1$$

より $|2iw+1| = |w-i|$ 両辺を 2 乗すると

$$|2iw+1|^2 = |w-i|^2 \Leftrightarrow (2iw+1)(-2i\bar{w}+1) = (w-i)(\bar{w}+i)$$

$$\Leftrightarrow 4|w|^2 + 2iw - 2i\bar{w} + 1 = |w|^2 + iw - i\bar{w} + 1$$

$$\Leftrightarrow 3|w|^2 + iw - i\bar{w} = 0 \quad \dots \dots (\star) \text{ (注)}$$

ここで $w = u + iv$ とおいて上の式に代入すると,

$$\Leftrightarrow 3(u^2 + v^2) + i(u + iv) - i(u - iv) = 0 \Leftrightarrow 3(u^2 + v^2) - 2v = 0$$

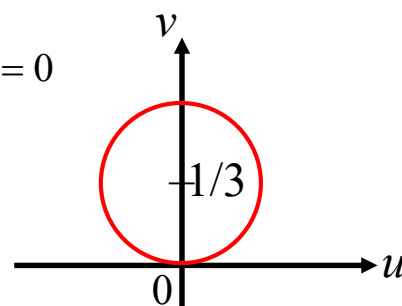
$$\Leftrightarrow u^2 + v^2 - \frac{2}{3}v = 0 \Leftrightarrow u^2 + \left(v - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

よって, 中心 $i/3$, 半径 $1/3$ の円. $|w - i/3| = 1/3$ と書いてもよい.

ただし計算には $|w|^2 = w \cdot \bar{w}$, $\bar{i} = -i$ などを用いた.

(w についての式変形と簡単化などで ~ 7 点, u の式までで ~ 8 点, 合計 15 点)

(図の配点 5 点)



(注) 実は $(\star)$ 式を両辺 3 で割って $\Leftrightarrow (w - i/3)(\bar{w} + i/3) = 1/9 \Leftrightarrow |w - i/3|^2 = (1/3)^2$

$\Leftrightarrow |w - i/3| = 1/3$ としても同じ結論が得られる. また, 3.1 の別解のように $z = e^{i\theta}$ においても解けるであろう.

3.3 $\sin z = 2$ を満たす z を求めよ. (配点:15 点)

(解答例)

$$\sin z \text{ の定義より, } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$$

$$\Leftrightarrow e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0 \quad (\text{ここまでで 4 点})$$

e^{iz} に関する 2 次方程式と見なして、解と係数の関係から

$$e^{iz} = i(2 \pm \sqrt{3}) = e^{(\pi/2 + 2n\pi)i} e^{\log(2 \pm \sqrt{3})} \quad (\text{このあたりで +5 点})$$

$$z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi - i \log(2 \pm \sqrt{3})$$

log の中が負にならないように注意！

$$z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi + i \log(2 \pm \sqrt{3}) \quad (\text{上の式と等価な式. どちらでもよい})$$

($2n\pi$ が考慮されていない場合は全体で 3 点減点)

(一般注) 対数を取るときと n 乗根をとるときは $2n\pi$ を忘れない.

3.4 $\sinh z = i$ を解け. (配点:15 点)

(解答例)

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \quad \text{より} \quad e^{2z} - 2ie^z - 1 = (e^z - i)^2 = 0 \quad (\text{ここまでで 8 点})$$

e^z に関する 2 次方程式になるが、解と係数の関係を用いるまでもなく

$$e^z = i = e^{(\pi/2 + 2n\pi)i} \quad \text{となるから} \quad z = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) i \quad (\text{最後までできて、満点 15 点})$$

($2n\pi$ の考慮がなされていない場合は 3 点減点)

3.5 $\log(z+i)$ を $u+iv$ 形式で表せ. なお, $z=x+iy$ とせよ. (配点:15 点)

(解答例)

$\log z$ の定義より,

$$\log(z+i) = \log|z+i| + i(\text{Arg}(z+i) + 2n\pi) = \ln \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

$$+ i \left(\tan^{-1} \frac{y+1}{x} + 2n\pi \right) = \frac{1}{2} \ln \{x^2 + (y+1)^2\} + i \left(\tan^{-1} \frac{y+1}{x} + 2n\pi \right) \quad (\ln \sqrt{\quad} \text{の式までで 4 点,}$$

$\text{Arg}(z+i)$ で 4 点, $2n\pi$ で 4 点, $\tan^{-1}$ の項 3 点)

3.6 $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$ であることを示せ. なお, $z=x+iy$ とせよ. (配点:15 点)

(解答例)

$$|\cos z|^2 = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) \overline{\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)} = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) \left(\frac{e^{-i\bar{z}} + e^{i\bar{z}}}{2} \right)$$

ここに, $z=x+iy$ を代入すると

$$= \left(\frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} \right) \left(\frac{e^{-i(x-iy)} + e^{i(x-iy)}}{2} \right) = \frac{1}{4} (e^{-2y} + e^{i2x} + e^{-2ix} + e^{2y})$$

$$= \frac{1}{2} (\cos 2x + \cosh 2y) \quad \dots \dots (\star)$$

ここで, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

また, $\cosh 2y = 2\sinh^2 y + 1$ なので, $(\star)$ 式に代入すると, 与式を得る.

(参考)

$$\sinh^2 y = \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2y} + e^{-2y} - 2}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2} (\cosh 2y - 1)$$

$$\therefore \cosh 2y = 2\sinh^2 y + 1$$