解析学　第2回

今日のポイント:
実関数と複素関数の
相違点に注目

複素関数

- 複素関数とは
- 写像
- 一次変換

指数関数・三角関数

- e^z , sin, cos

双曲線・対数・べき関数

- sinh, cosh, log z, z^a

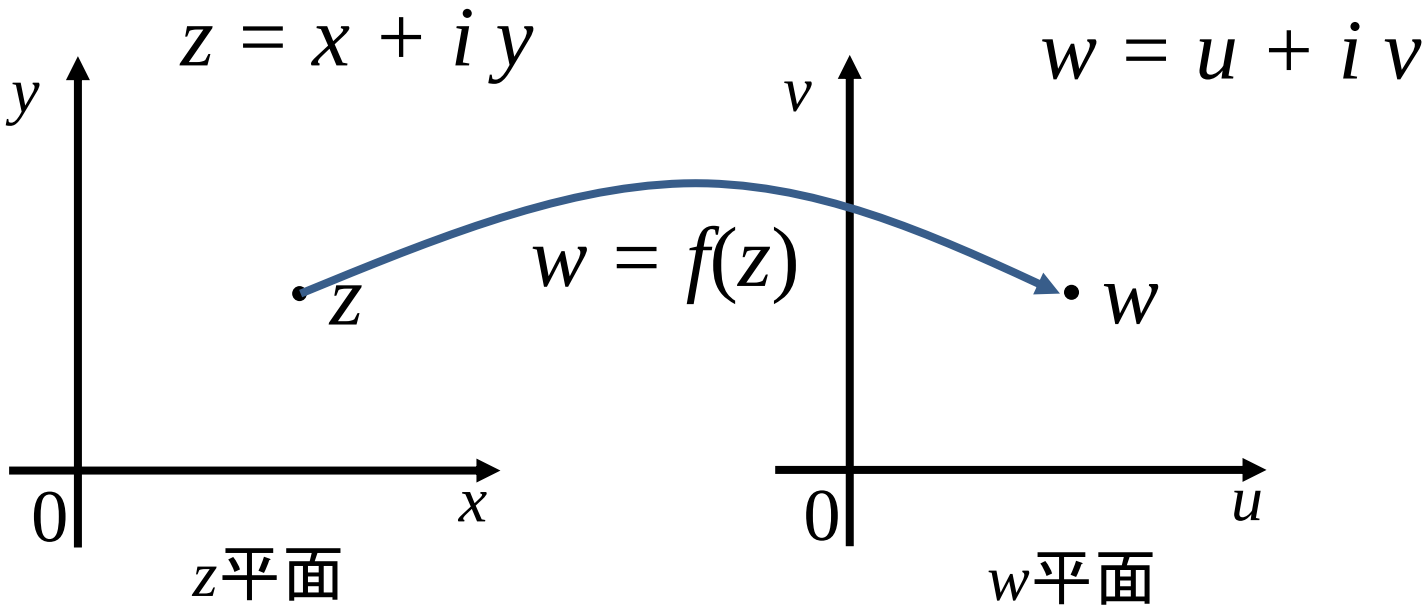
複素関数

目標

- 複素関数と実関数の違いを説明できる
- 境界，領域，範囲の定義を言える
- 一価関数と多価関数の違いを説明できる
- 写像を，例を使って説明できる
- 一次変換を求め，図示できる

複素関数とは

複素数 z が，複素数 w に対応付けられるとき
$w=f(z)$ と表して，$f(z)$ を複素関数という



用語の整理

複素平面の

領域: 境界を含まない

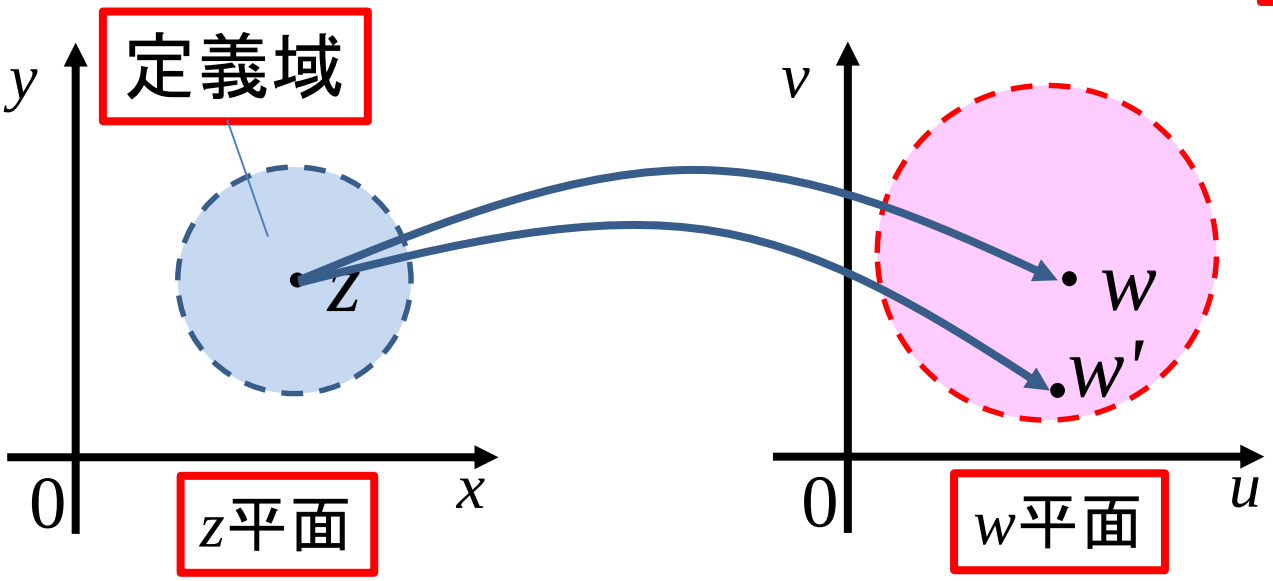
範囲: 境界を含む

$$w = f(z)$$

従属変数

独立変数

1つの複素変数に
2つの独立な実数
変数を含んでいる



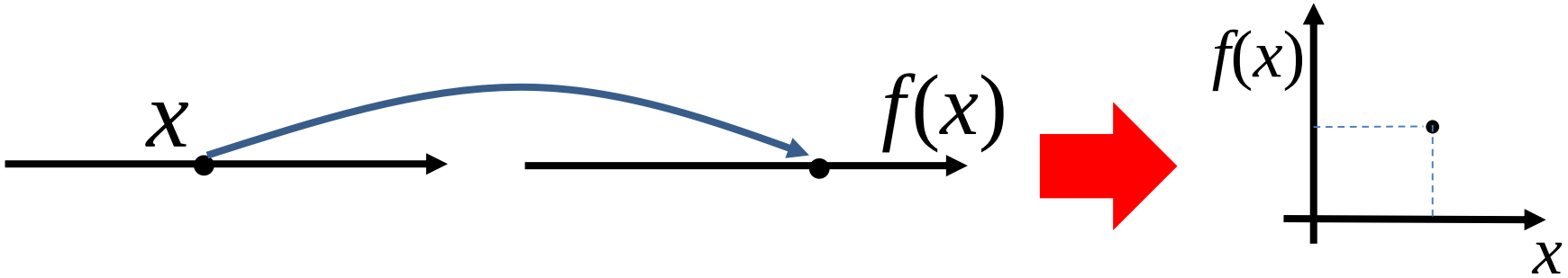
一価関数: wが1つ

多価関数: wが2つ以上

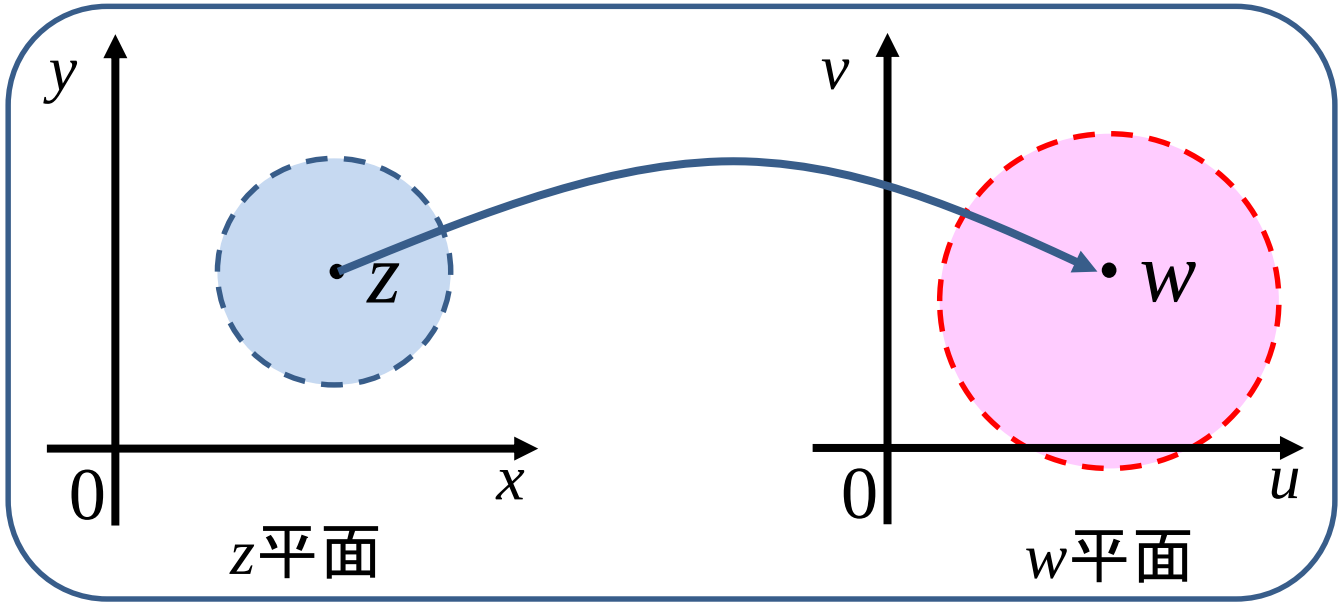
実関数との違い

実関数の場合は実数から実数への対応だった

複素関数の場合は複素数(平面)から複素数(平面)の対応



1変数なら，2次元的な1枚のグラフで $f(x)$ を図示できる.



2次元的な1枚のグラフで $f(z)$ を図示することはできない.

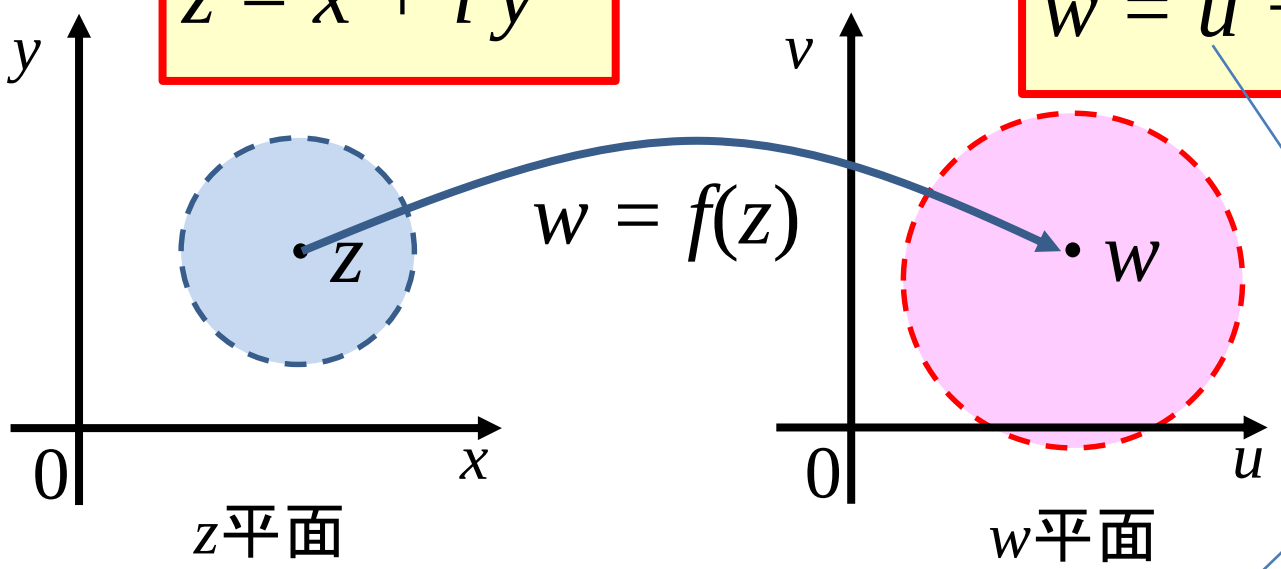
複素関数を図示する方法1

- zとwをそれぞれ複素平面上に図示

（特定の図形など，定義域を限定する場合はこの表示法がわかりやすい．
一方，点の対応関係を明確に表示するのは難しい場合もある．）

$$z = x + i\,y$$

$$w = u + i\,v$$



x, yの関数

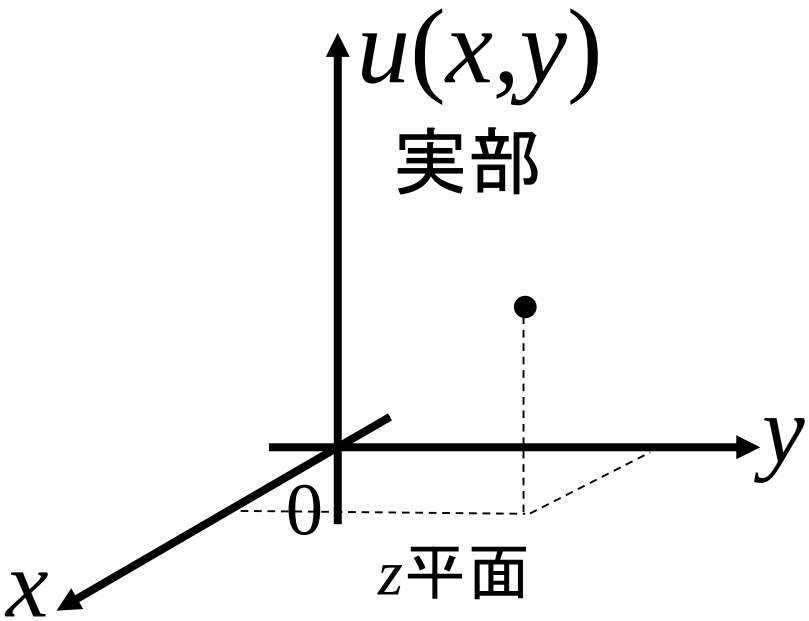
$$w = \underline{u(x,y)} + i\,\underline{v(x,y)}$$

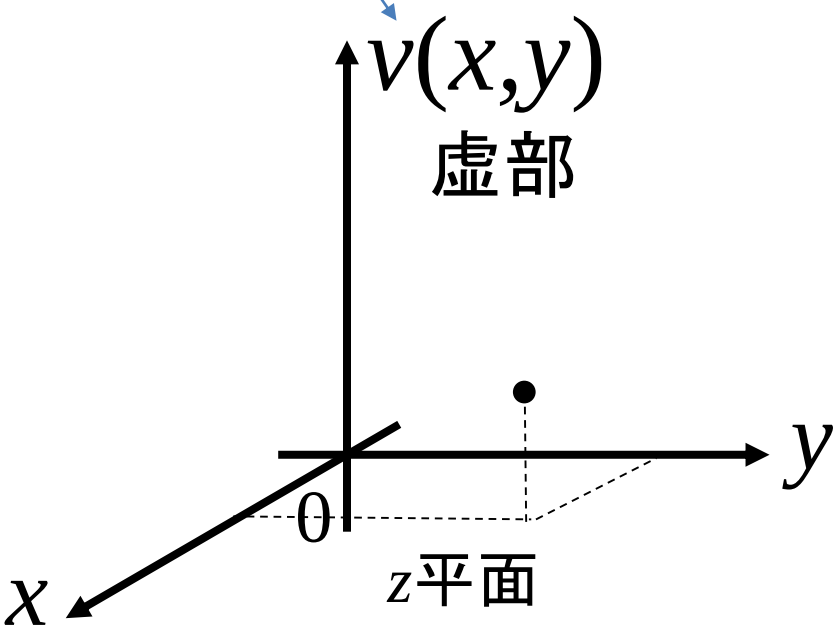
実関数

複素関数を図示する方法2

- uとvをそれぞれ x, yの実関数として図示する

$$w = f(z) = \underline{u(x,y)} + i\,\underline{v(x,y)}$$





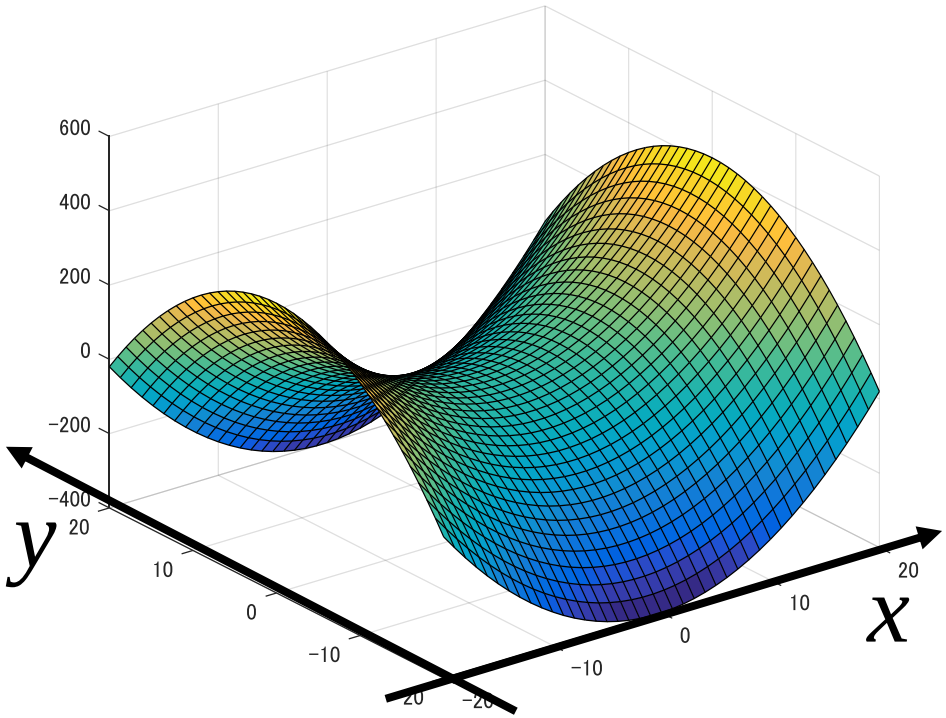
全てのx,yについてプロットすると3次元的なグラフになる

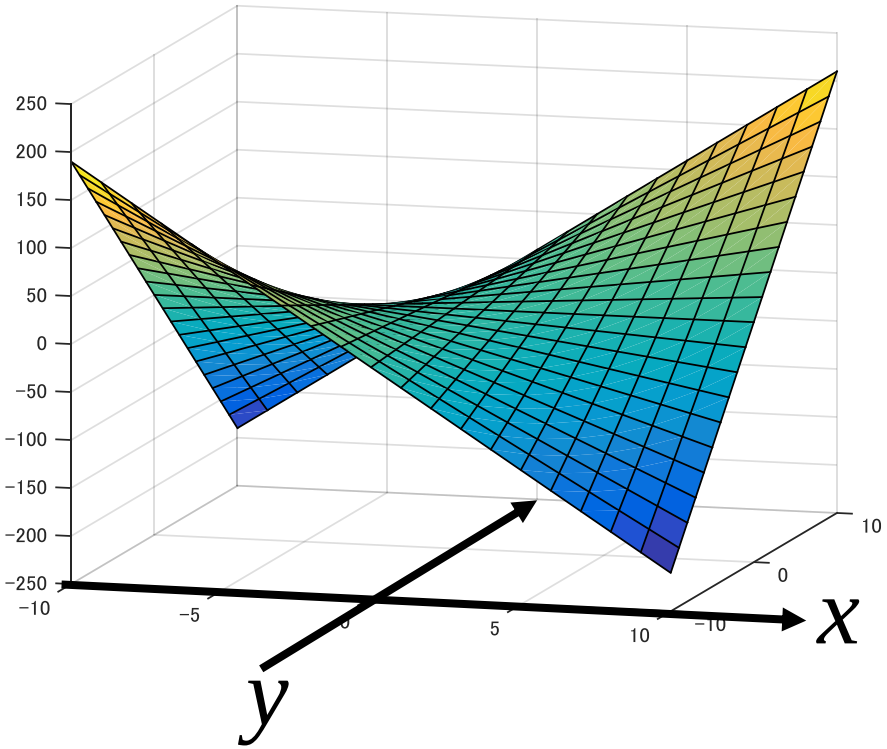
方法2による表示例

例題3．1（1）　$w = z^2 + z = u + i\,v$

$z=x+iy$を代入して実部uと虚部vに分離

$u(x,y)= x^2 - y^2 + x$　　$v(x,y)= 2xy + y$





例題３．１

$z = x + iy$ として, 次の関数wの実部$u(x,y)$と虚部$v(x,y)$を求めよ

(1) $w = z^2 + z$

(方針） $z = x + iy$ を代入して, 実部uと虚部vに分ける

(解)

$$w = z^2 + z$$

代入

$$= (x + iy)^2 + (x + iy)$$

$$= x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy$$

実部と虚部に分ける

$$= \underbrace{x^2 - y^2 + x}_{u(x,y)} + i\underbrace{(2xy + y)}_{v(x,y)}$$

例題３．１

(方針） $z = x + iy$ を代入して，実部uと虚部vに分ける

(2) $$w = \frac{z}{\bar{z}}$$

分母を実数化

$$= \frac{x+iy}{x-iy} = \frac{x+iy}{x-iy}\,\frac{x+iy}{x+iy}$$

分母分子に同じ複素数を乗ずる

$$= \frac{x^2 - y^2 + 2ixy}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{\frac{2xy}{x^2 + y^2}}_{v(x,y)}$$

(参考)グラフ表示用MATLABコード

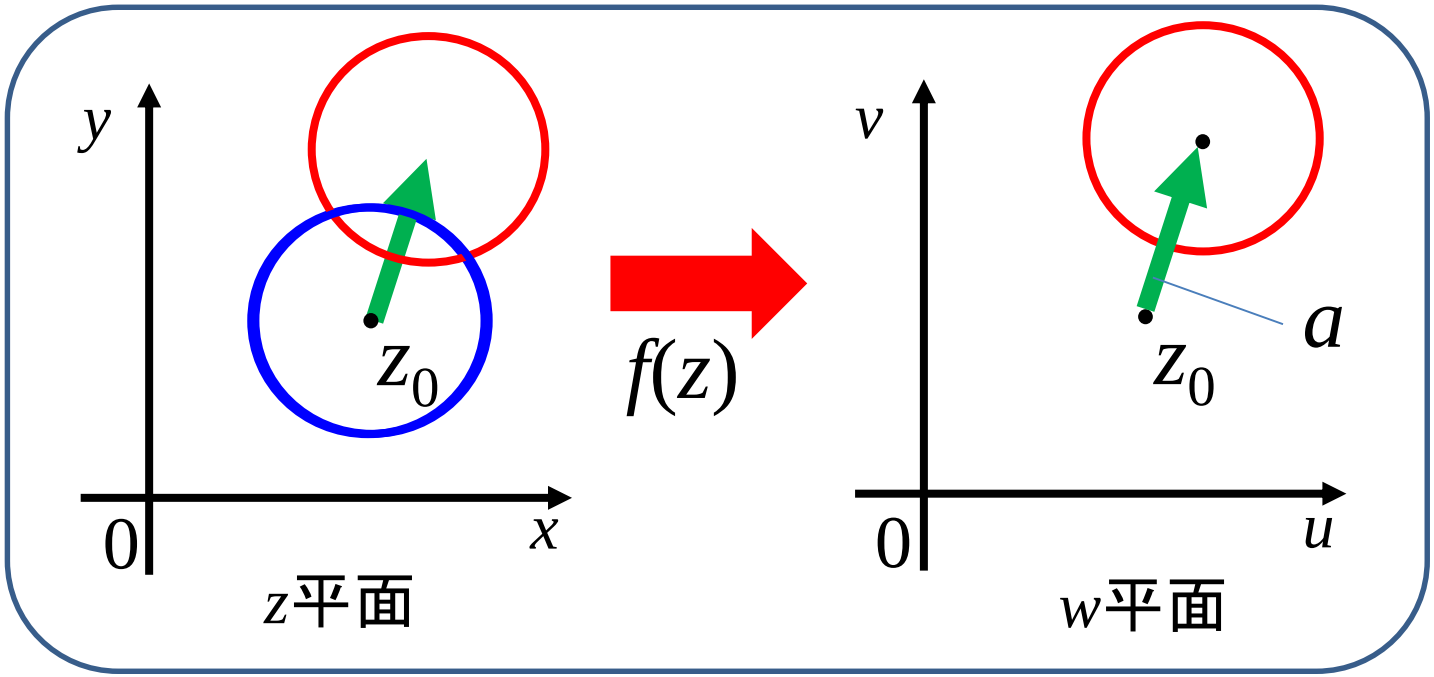
```
% 例題3.1のグラフ表示
% このままでも「セクションの実行」で実行できる．「実行」するには関数としての
% 定義が必要．具体的には，function宣言してfunction名をファイル名と一致させる．

% 変数Zの範囲を定義．meshgrid()を使って(x,y)メッシュを行列として生成．
x = -100:100;
y = -100:100;
[X Y]=meshgrid(x,y);

% 下記 Z の定義の先頭の%のどれか１つを削除して有効化して表示する．
% Z の定義が２つあると，最後の定義が有効になる．

% (1)
%実部 u(x,y)
%Z= X .* X + Y .* Y + X;
%要素ごとの乗算には .* を使う
%虚部 v(x,y)
%Z= 2.*X.*Y+Y;

% (2)
%実部 u(x,y)
%Z= (X .* X - Y .* Y) ./ (X .* X + Y .* Y) ;
%虚部 v(x,y)
Z= 2.*X.*Y ./ (X .* X + Y .* Y);

% 3Dグラフ描画
figure
surf(X,Y,Z);
% シェーディングオプション(省略可)
shading interp;light('Position',[-1 -1 2]);rotate3d;
```

本日2つ目の重要項目

写像

z平面上の点の集合Dを, 関数 $w=f(z)$ によって, w平面上の点の集合に対応付けることを

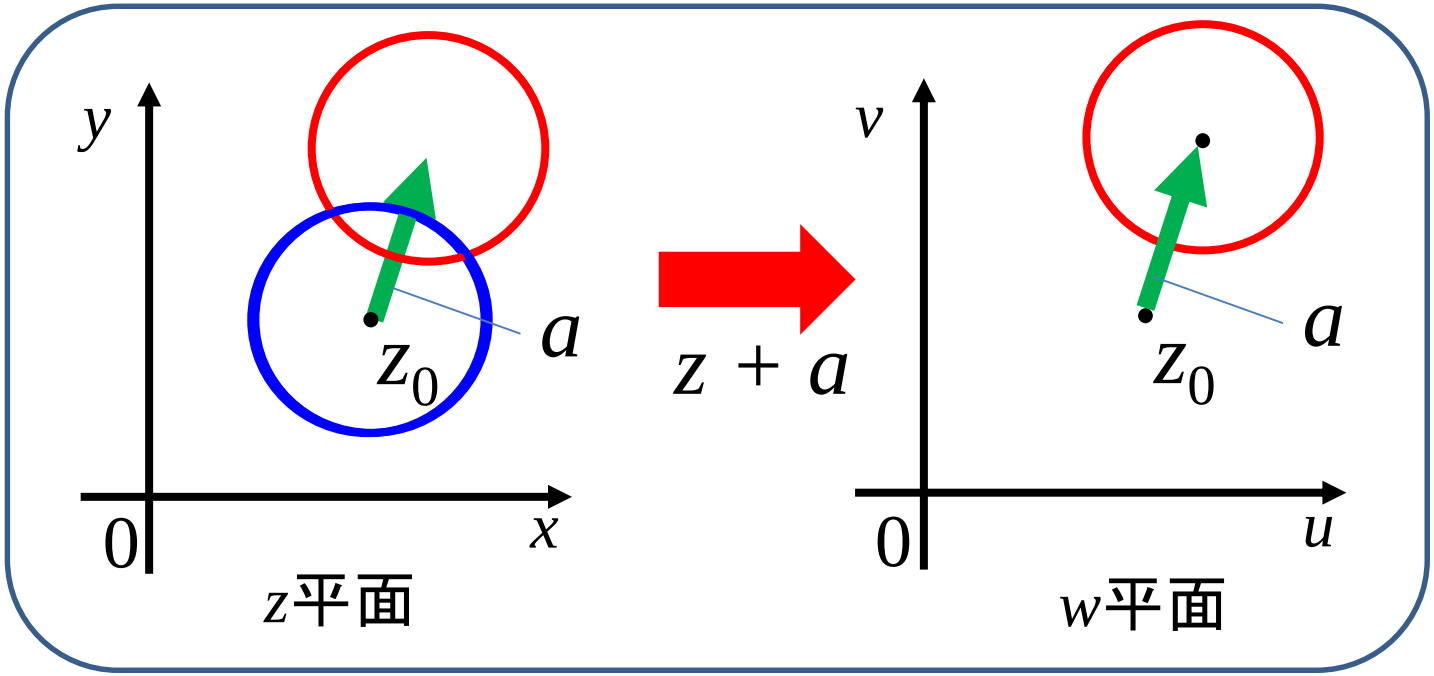
写像または変換という.



円周上の点の集合をaだけ平行移動する写像の例

定数aだけ平行移動する写像の関数表現

$$w = z + a$$



円周上の点の集合をaだけ平行移動する写像の例

次の関数はどのような写像か？

$$\boxed{w = az}$$

ただし，a は実定数とする

次の関数はどのような写像か？

$$\boxed{w = az}$$

ただし，a は実定数とする

（答え）

原点を中心にa 倍の拡大・縮小.
負の場合は原点対称に移動.

次の関数はどのような写像か？

$$\boxed{w = az}$$

ただし，$|a|=1$の複素定数

（答え）

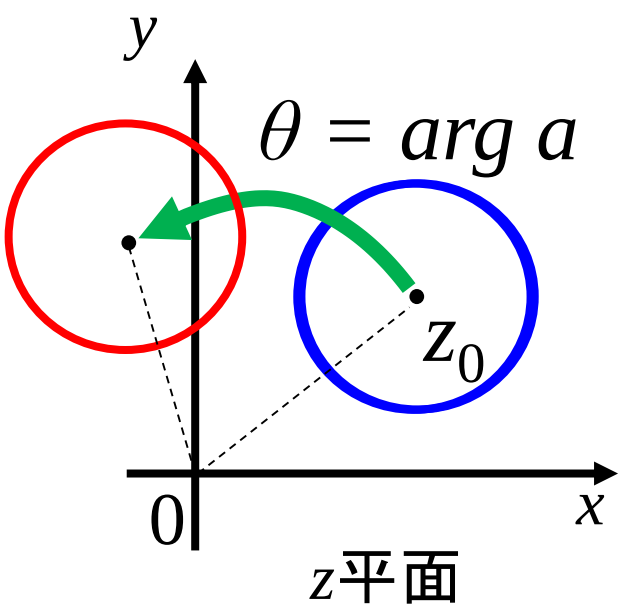
$a = \cos\theta + i\sin\theta$　と表すと，

原点中心に，各点 z を θ $(arg\ a)$回転させる

【1．3極表示「複素数の積」を参照】

$w=az$ $(|a|=1)$の写像

$$a = \cos\theta + i\sin\theta$$ より,

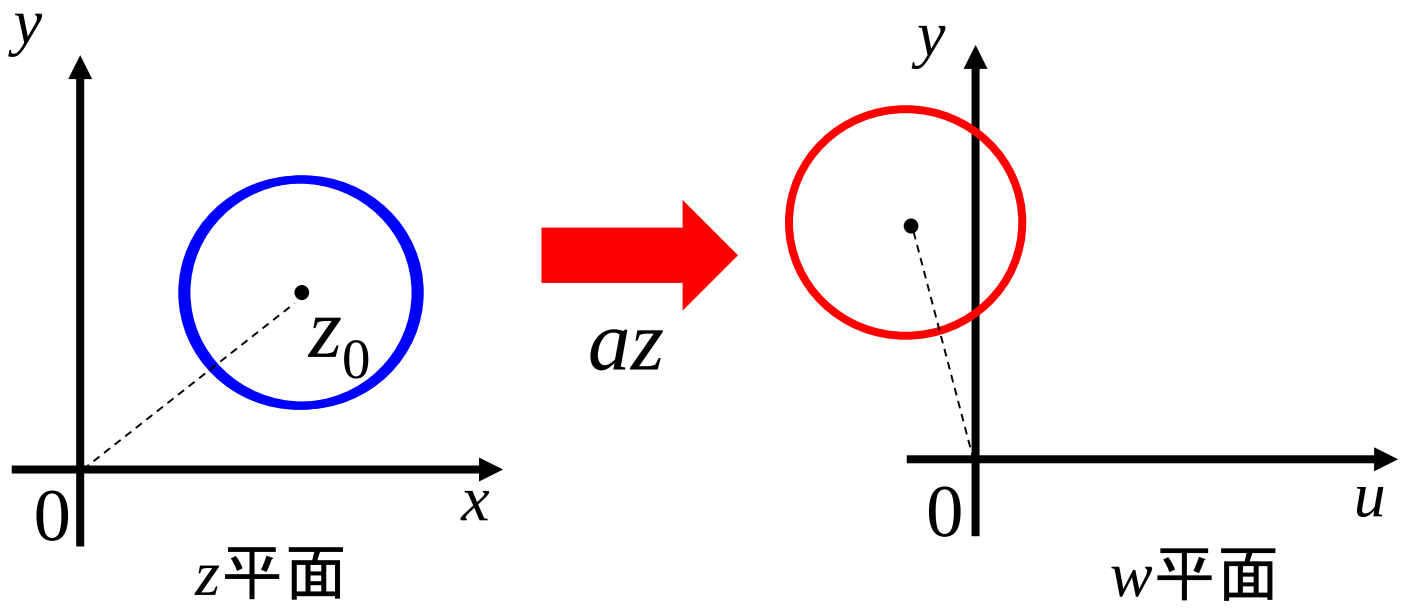


円周上の点の集合を $\arg a$ だけ回転移動する写像の例

（注:どの偏角を見ているかを間違えないように. $\arg a$か$\arg z$か, など. ）

$w=az$ $(|a|=1)$の写像

$$a=\cos\theta+i\sin\theta$$ より,



円周上の点の集合を $\arg a$ だけ回転移動する写像の例

（注:どの偏角を見ているかを間違えないように. $\arg a$か$\arg z$か, など. ）

$w=az+b$ の写像 (a,bは複素定数)

- 点zの原点からの距離を $|a|$ だけ拡大・縮小(負の場合は原点対称)
- 角度 $\mathrm{Arg}\, a$ だけ反時計回りに原点中心の回転
- b だけ平行移動

$a=0$のときは，すべての点zはbに写像
$|a|=1$のときは平面図形の形状が保存される

$w = \dfrac{1}{z}$ の写像

既に(1.10)で証明したように，$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$
に対して，$z \neq 0$の時，

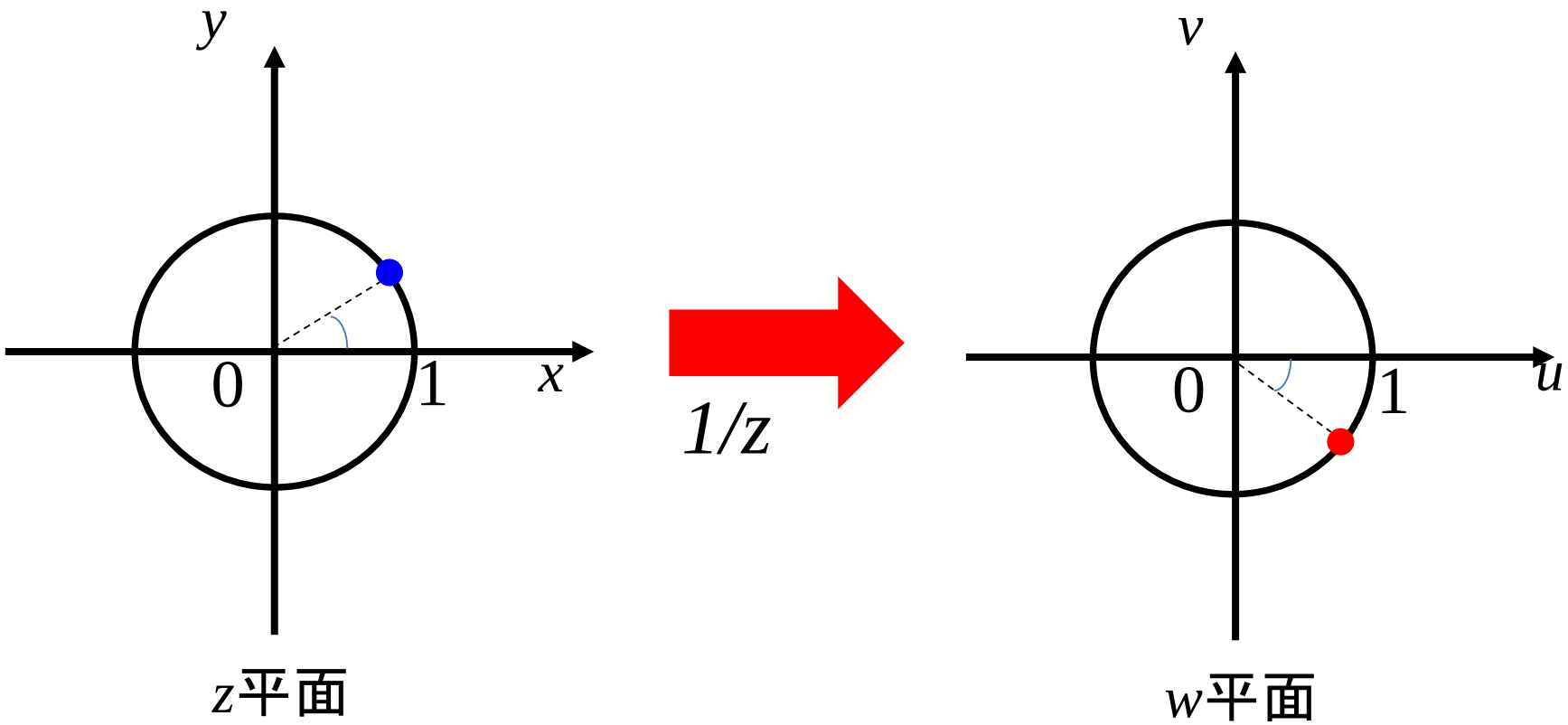
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\} \qquad (1.10')$$

なので，原点からの距離(絶対値)は $1/|z|$ に，

偏角は $-\theta = -\mathrm{Arg}\, z$ (実軸を中心に折り返す)となる.

この写像を **反転** という.

$w = \dfrac{1}{z}$ による反転



単位円上の点は，単位円上に対応する．

注）単位円でないと大きさは保存されないのと，
単位円の内部は単位円の外部に移ることに注意．

$w=z^2$ の写像

どのような写像になるか調べるために $z=x+iy$ を代入すると,

$$w=(x+iy)^2$$

$$=x^2+2ixy-y^2 \quad =\underbrace{x^2-y^2}_{u(x,y)}+i(\underbrace{2xy}_{v(x,y)})$$

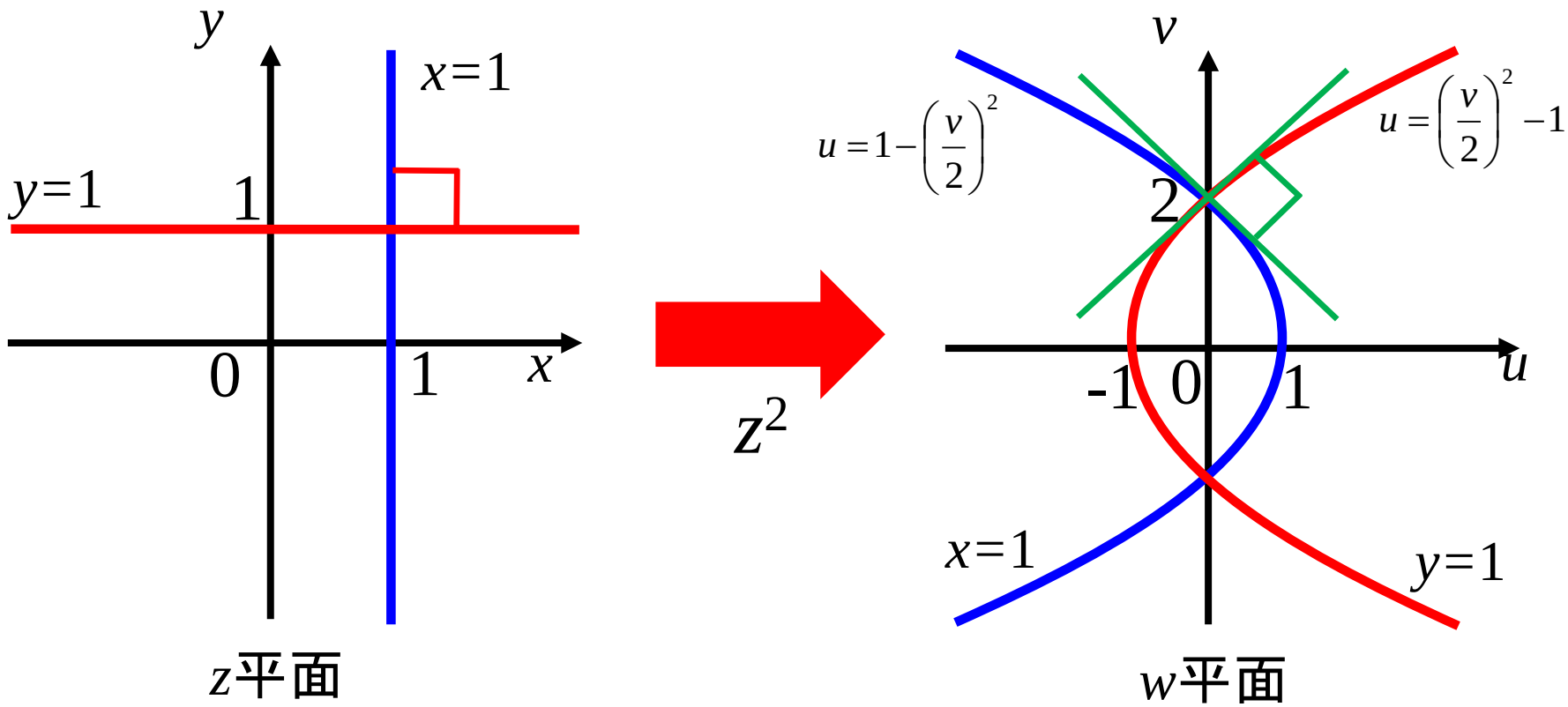
z平面で虚軸に平行な直線 $x=1$ は,

w平面では, $w=1-y^2+i2y$ となる.

$v=2y$ より, $y=v/2$ を上の式$u=x^2-y^2$に代入すると

$$u=1-\left(\frac{v}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad u\text{の正方向に凸の放物線}$$

$w=z^2$ による写像



曲線間の角度が写像によって変化しない

→ **等角写像**

等電位線と電気力線の関係など，
工学上重要な応用がある

本日3つ目の重要項目

一次変換

定義：次の式で定義される写像を一次変換または
一次分数変換という.

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

ただし，a,b,c,d は複素定数であり，

$$ad - bc \neq 0$$

（分母が0になったり，あまりにも自明な変換を排除するため）

分子だけでも拡大･縮小，回転，平行移動を表すことができる.

分母は$1/z$を含むので，反転を表しているはず．係数を適切に設定することで，これらの写像を組み合わせて実現できる.

単純な場合について，具体的に調べてみよう.

$c=0,\ a\neq 0$ の場合

$ad-bc\neq 0$ より，$d\neq 0$ が保証されるからdで除算できて

$$w=\frac{az+b}{\underbrace{cz+d}_{\to 0}}=\frac{az+b}{d}=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$$

既に調べた $w=az+b$ と同じ形.

拡大･縮小，回転，平行移動を表す.

$c \neq 0$ の場合

分母と分子をcで割る

分母と同じ形になるように足して引く

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c}\left(z + \frac{d}{c}\right) - \frac{ad}{c^2} + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}}$$

$$= \boxed{\frac{a}{c}} + \frac{\boxed{\frac{bc-ad}{c^2}}}{\boxed{z + \boxed{\frac{d}{c}}}}$$

拡大縮小，回転

平行移動

平行移動，反転

z 平面上の異なる3点z_1, z_2, z_3を，それぞれw平面上のw_1, w_2, w_3に変換する一次変換

$$\boxed{\frac{w-w_1}{w-w_3}\,\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\,\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}}$$

（対応関係）

$$z_1 \longrightarrow w_1$$
$$z_2 \longrightarrow w_2$$
$$z_3 \longrightarrow w_3$$

対応関係の証明

(定義式)⇔

分母をすべて分子へ持ってくる

$$(w-w_1)(w_2-w_3)(z-z_3)(z_2-z_1)$$
$$=(w-w_3)(w_2-w_1)(z-z_1)(z_2-z_3)$$

$z=z_1$を代入すると、(右辺)＝0より，左辺から $w=w_1$ が導かれる.
$z=z_3$を代入すると、(左辺)＝0より，右辺から $w=w_3$ が導かれる.
$z=z_2$を代入すると、 $(w-w_1)(w_2-w_3)=(w-w_3)(w_2-w_1)$

$\Leftrightarrow$ $w=w_2$ 以上.

（例）次の３点写像を表す一次変換の表式を求めよ

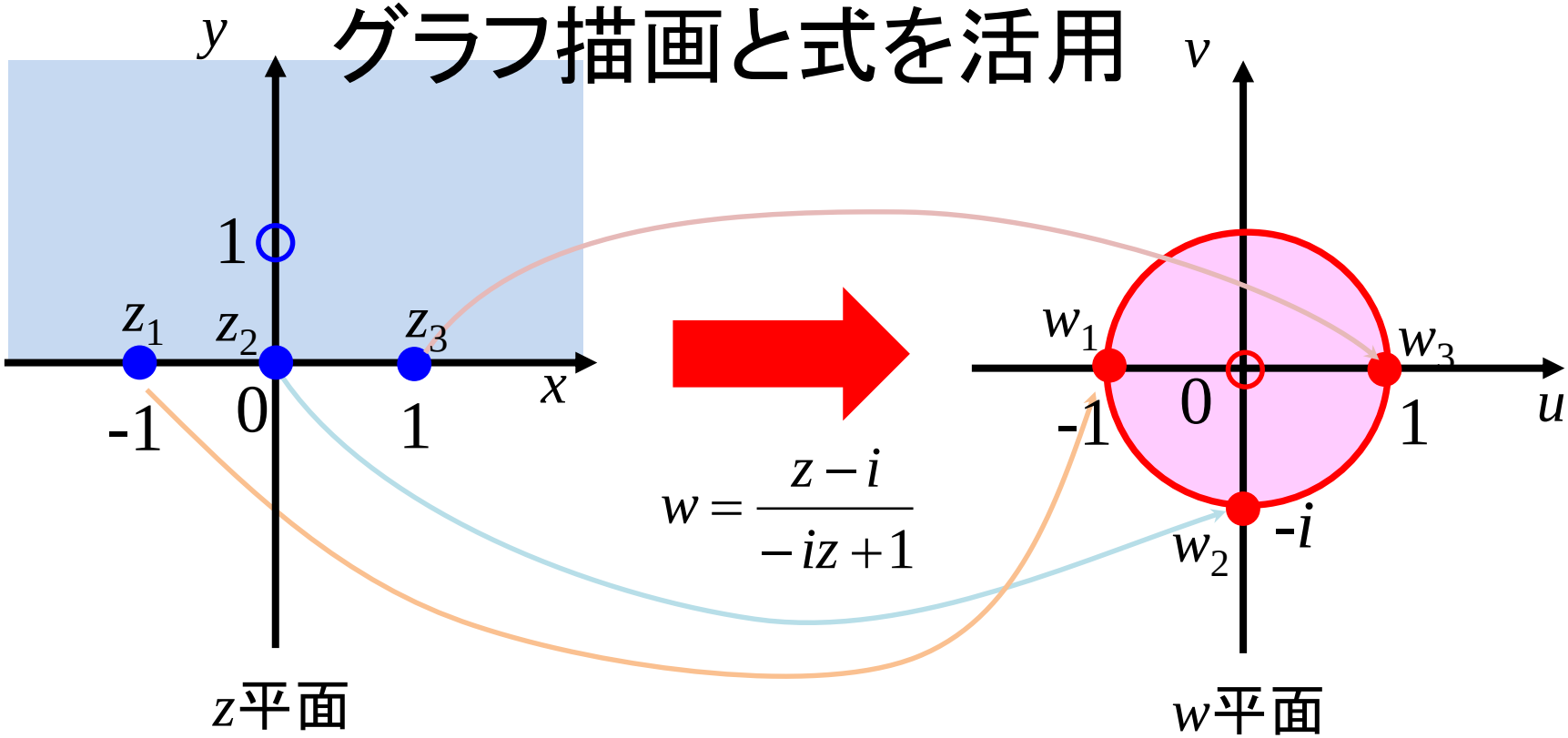
$$z_1 = -1 \longrightarrow w_1 = -1$$
$$z_2 = 0 \longrightarrow w_2 = -i$$
$$z_3 = 1 \longrightarrow w_3 = 1$$

（解）式(3.2)に値を代入すると

$$\frac{w+1}{w-1}\frac{-i-1}{-i+1} = \frac{z+1}{z-1}\frac{-1}{1} \Leftrightarrow \boxed{w = \frac{z-i}{-iz+1}}$$

点や範囲の対応関係を複素平面上で確認しよう

点や範囲の対応関係の調べ方
グラフ描画と式を活用



実軸$z=x$の写像を調べてみる.

式に代入すると, $w = \dfrac{x-i}{-ix+1} = \dfrac{x}{x^2+1} + i\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \equiv u + iv$

グラフを描けば一目瞭然だが, $u^2+v^2=1$ なので円とわかる.

$z=i$の写像は$w=0$に, $y \geqq 0$の範囲は$|w| \leqq 1$の円とその内部へ.

例題３．３　１次変換 $w=\dfrac{2z+1}{z-1}$ による円 $|z|=2$ の写像を求めよ.

(解)　をzについて解くと，　$z=\dfrac{w+1}{w-2}$

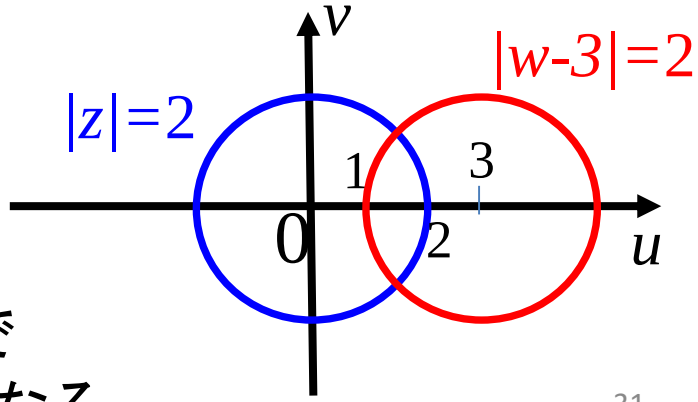
これを$|z|=2$ に代入すると $\left|\dfrac{w+1}{w-2}\right|=2$　より

$|w+1|=2|w-2|$　　両辺2乗し，$w\overline{w}=|w|^2$ を用いて整理

$\Leftrightarrow\ w\overline{w}-3w-3\overline{w}+5=0$

$\Leftrightarrow\ (w-3)(\overline{w}-3)-4=0$

$\Leftrightarrow\ |w-3|=2$　　よって，中心が3で
半径2の円が像となる.



【例題3．3解答の補足】

- +3平行移動しただけなので，$w=z+3$と等価
- 複素関数$w=z+3$と，最初に与えられた一次変換 $w=\dfrac{2z+1}{z-1}$ は，複素関数としては等価ではないが，$|z|=2$の円周上に限定すれば，等価といえる．
- 従って，円周上からはずれた領域の変換は，等価である保証は無い．

指数関数・三角関数

目標

- 複素指数関数の定義式を示し，計算できる
- 極形式の複素数を指数表示できる
- 複素三角関数の定義を示し，指数関数に変換できる
- 実数と複素数のオイラーの公式を使うことができる
- 指数関数，三角関数を含む方程式を解くことができる

指数関数の定義

$z=x+iy$ に関する複素指数関数 e^z は,
実関数e^x, $\cos y$, $\sin y$ により次のように定義される

$$\boxed{e^z \equiv e^x\left(\cos y + i\sin y\right)} \quad (4.1)$$

特にzが純虚数(iy)のとき，定義式で$x=0$とすると,
次の **オイラーの公式** が得られる.

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i\sin y} \quad (4.2)$$

指数の累乗法則

複素指数関数 e^z の定義式(4.1)に,
オイラーの公式(4.2)を代入すると,

$$e^z = e^x e^{iy}$$

一方, e^z の z に, $z=x+iy$ を代入すると,

$$e^z = e^{x+iy}$$

上の2式の右辺同士は等しくなければならないから,

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} \qquad (4.2')$$

指数関数の累乗法則が複素数に拡張された.

極形式の指数表示

複素数を極形式で表示すると,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (1.3)$$

ここに, オイラーの公式(4.2)を適用すると,

$$\boxed{z = re^{i\theta}} \qquad (4.3)$$

これを, **極形式の指数表示** という.

e^zの定義式(4.1)で, $e^x \equiv r$, $y \equiv \theta$ と置けば, 同じ式であるとわかる.
この形式は, $x+iy$ 形式と同様, すべての複素数を表すことができる.

指数関数の公式

ここまでに出てきた定義と性質から導出される

1） $$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

2） $$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$$

指数法則

3） $$\left(e^{z}\right)^{n} = e^{nz}$$

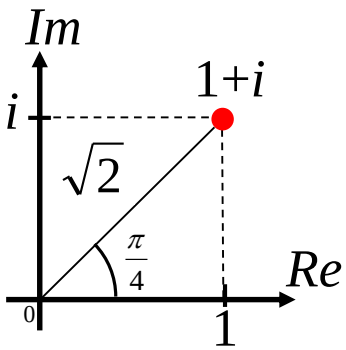
べき乗則
(n=0,±1, ±2,....)

4） $$e^{z+2n\pi i} = e^{z}$$

周期性の公式
(n=0,±1, ±2,....)

例題4．1　方程式 $e^z=1+i$ の解 z を求めよ.

(解) $1+i$ を極形式で表示すると　(例題1.3)



$$1+i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)\right\}$$

$$=e^{\log\sqrt{2}}\boxed{e^{(\frac{\pi}{4}+2n\pi)i}}$$

オイラーの公式

$$\boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$$

$$=e^{\left\{\frac{1}{2}\log 2+\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)i\right\}}=e^z$$

より,

$$z=\frac{1}{2}\log 2+\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)i$$

例題4．2　$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$ となることを示せ.

(解)　$z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2$ とおいて左辺に代入すると

e^zの定義式(4.1)

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}\left(\cos y_1 + i\sin y_1\right)e^{x_2}\left(\cos y_2 + i\sin y_2\right)$$

$$= e^{x_1}e^{x_2}\left\{\left(\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2\right) + i\left(\sin y_1\cos y_2 + \cos y_1\sin y_2\right)\right\}$$

(1.8)で証明済み(三角関数の加法定理)

$$= e^{x_1+x_2}\boxed{\left\{\cos\left(y_1+y_2\right) + i\sin\left(y_1+y_2\right)\right\}}$$

オイラーの公式

$$= e^{x_1+x_2}\boxed{e^{i\left(y_1+y_2\right)}}$$

$$= e^{z_1+z_2}$$

$w=e^z$ の写像

どのような写像になるか調べるために
$z=x+iy$ を代入すると,

$$w = e^x e^{iy}$$

$$= e^x\left(\cos y + i\sin y\right) = u + iv$$

より, $u = e^x \cos y$ $v = e^x \sin y$ となるから,

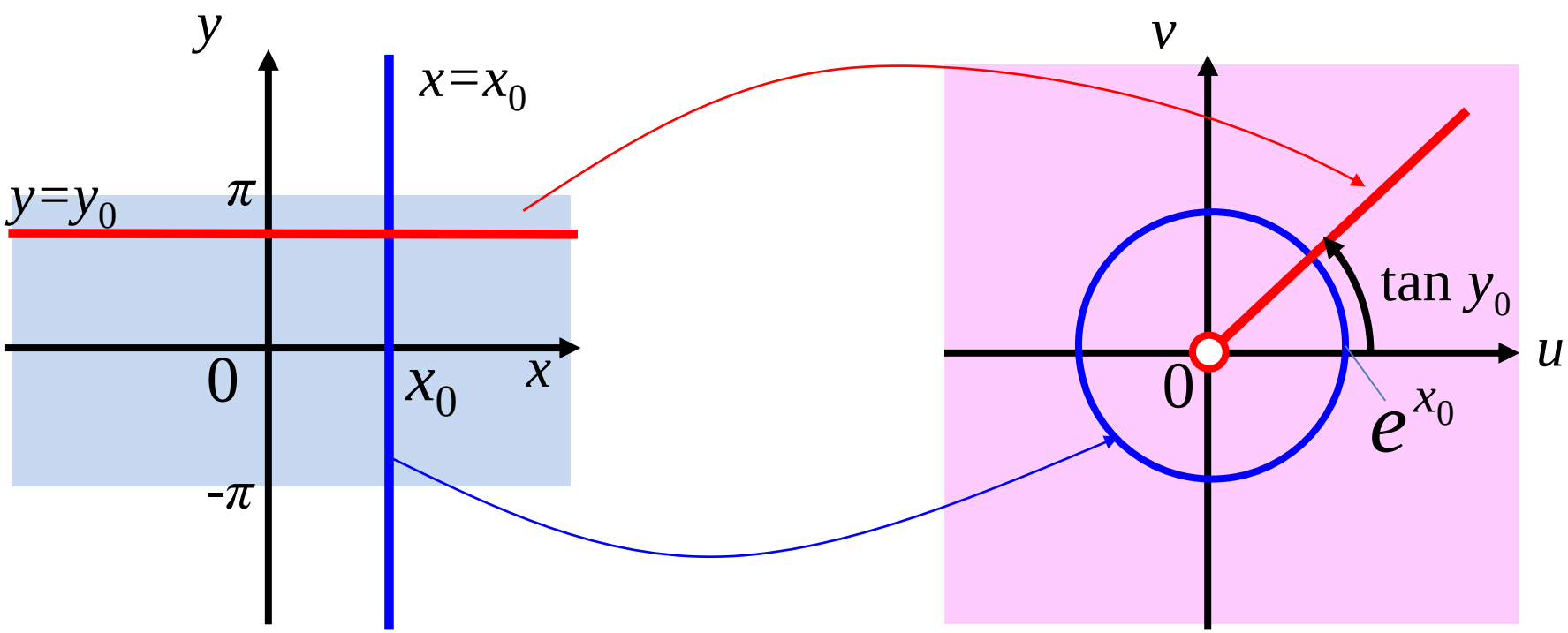
$u^2 + v^2 = e^{2x}$ および, $v = u \cdot \tan y$

$w=e^z$ の写像

$$\begin{cases} u^2+v^2=e^{2x} \\ v=u\cdot\tan y \end{cases}$$

z平面上でy軸に平行な$x=x_0$のw平面上の像は，半径e^{x0}の円.

x軸に平行な$y=y_0$のw平面上の像は角度 $\tan y_0$で原点を含まない半直線.



z平面　　w平面

三角関数の定義

複素三角関数 $\cos z$ と $\sin z$ を次のように定義する.

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} \quad \boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}} \qquad (4.4)$$

その他の三角関数はcosとsinにより定義する.

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},\ \sec z = \frac{1}{\cos z},\ \mathrm{cosec}\, z = \frac{1}{\sin z}$$

複素数のオイラーの公式

式(4.1)から e^{-iz} を消去すると,複素数のオイラーの公式を得る

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i \sin z} \qquad (4.5)$$

$z=x+iy$とおいて$\cos z$ と $\sin z$ を x,yで表すと

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \\ \sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned} \qquad (4.6)$$

ただし, $\cosh y = \dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}$ $\quad \sinh y = \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2}$ （実数の双曲線関数）

cos z, sin z をx, yで表しておく
（後で使う）

cos z と sin z の定義式(4.4)で,
$z=x+iy$とおいてcos z と sin z を x(実部), y(虚部)で表すと

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$
$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \qquad (4.6)$$

ただし, $\cosh y = \dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}$ $\sinh y = \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2}$ （実数の双曲線関数）

複素三角関数の公式

1） $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

2） $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$

3） $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1$

4） $\cos(-z) = \cos z$

5） $\sin(-z) = -\sin z$

6） $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$ （ $z=x+iy$ ）

7） $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$ （ $z=x+iy$ ）

式6）と7）は，式(4.6)と実数の双曲線関数の公式 $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, および三角関数の公式 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を使って導かれる.

補足的注意

- おおむね実数と同等の公式が成り立つと考えてよい
- 一方，関数が取る値(特に絶対値）は実数からの類推と食い違う場合も多いので注意
⇒定義に戻って計算する

例題4．３　加法定理（２）（３）のうち，$\cos(z_1+z_2)$と$\sin(z_1+z_2)$を導け

(方針)

指数の関係式

$$e^{i(z_1+z_2)} = e^{iz_1}e^{iz_2} \quad と \quad e^{-i(z_1+z_2)} = e^{-iz_1}e^{-iz_2}$$

を，複素数のオイラーの公式(4.5)を使って展開し比較すると導かれる.

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i\sin z}$$

例題4．4

$\sin\left(\frac{\pi}{6}+i\right)$ を計算して，

(実部)+i(虚部) の形で示せ．

(解)

公式(4.6) $\boxed{\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}$ に代入すると，

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+i\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cosh 1 + i\cos\frac{\pi}{6}\sinh 1$$

$$= \frac{e+e^{-1}}{4} + i\sqrt{3}\,\frac{e-e^{-1}}{4}$$

(別解)

加法定理$\sin(z_1+z_2)$の式を使っても良い．

また，$\sin z$ の定義式(4.4)から出発しても同じこと．

例題４．５　方程式 $\cos z = i$ を解け.

(解１) $\cos z$ の定義式 $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ を代入すると,

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = i \quad \Leftrightarrow e^{iz}+e^{-iz} = 2i$$

両辺に e^{iz} を乗じて

$$\Leftrightarrow \quad e^{2iz} - 2ie^{iz} + 1 = 0$$

これを e^{iz} に関する2次方程式と見なして
解と係数の関係を使って解くと,

$$e^{iz} = i \pm \sqrt{-1-1}$$

$$= i \pm \sqrt{-2} = i \pm i\sqrt{2} = i(1 \pm \sqrt{2})$$

正負を確認して次にlogをとる

まずは±の＋の場合を考える.

$$e^{iz} = i(1+\sqrt{2}) \text{ なので,} \quad = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)} e^{\log(1+\sqrt{2})}$$

指数同士を等しいとおくと

$$iz = i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)+\log(1+\sqrt{2})$$

両辺を i で除せば

$$z = \frac{\pi}{2}+2n\pi - i\log(1+\sqrt{2}) \qquad \cdots\cdots(☆)$$

一方，$e^{iz} = i(1-\sqrt{2})$ のときは，$= -i(\sqrt{2}-1)$

＞0でないとlogを取れないので符号を確認した

$$= e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)} \boxed{e^{\log(\sqrt{2}-1)}}$$

両辺の指数同士を等しいとおくと

$$iz = i\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)+\log(\sqrt{2}-1)$$

両辺を i で除せば

$$z = -\frac{\pi}{2}+2n\pi - i\log(\sqrt{2}-1) \quad \cdots\cdots(\bigstar)$$

(☆)と(★)をまとめると，

$$z = \pm\frac{\pi}{2}+2n\pi - i\log(\sqrt{2}\pm 1) \quad \text{(複合同順)}$$

$(n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$

例題4．5　方程式 $\cos z = i$ を解け.

(解2)　$z=x+iy$とおくと

公式(4.6) $\boxed{\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}$ より,

（実部）$\cos x \cosh y = 0$　かつ（虚部）$\sin x \sinh y = -1$

$\Leftrightarrow \quad x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$

(cosh y>0なのでcos x=0でなければならないから)

左でcos$x$=0よりsin$x$=±1

$\therefore \sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = \mp 1 \Leftrightarrow e^{2y} \pm 2e^y - 1 = 0$

e^yについての2次方程式と見てe^yについて解くと

解と係数の関係から $\dfrac{\mp 2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \mp 1 \pm \sqrt{2}$

e^y＞0なので正の解だけ採用すると,

$e^y = \sqrt{2} \mp 1 \Leftrightarrow y = \log\left(\sqrt{2} \mp 1\right)$

以上をまとめて $z = x + iy$

$= \left(\pm\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i\log\left(\sqrt{2} \mp 1\right)$　（複合同順）

例題4．5の解答例注）

前ページで示した解は，（解１）あるいは，教科書p.24に示された解と微妙に符号が食い違っているように見えるが、logの項には下のような関係が成り立っている.

$$\underline{-\log\left(\sqrt{2}-1\right)} = \log\left(\sqrt{2}-1\right)^{-1} = \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}\right)$$

$$= \underline{\log\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

従って、同じ解を表している.

$$z = \left(\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)+i\log\left(\sqrt{2}\mp 1\right)$$ （前ページの表記）

$$= \left(\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)-i\log\left(\sqrt{2}\pm 1\right)$$ （教科書の表記）

（いずれも複合同順, n=0,±1,±2,....）

$w=\sin z$ の写像

$\boxed{\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}$

$\sin z = u + iv$ と表すと，式(4.6)より，u,vは

$$u = \sin x \cosh y \ , \ v = \cos x \sinh y$$

ここから次の4つの式を導き，

$$\cosh y = \frac{u}{\sin x}, \ \sinh y = \frac{v}{\cos x}, \sin x = \frac{u}{\cosh y}, \cos x = \frac{v}{\sinh y}$$

実関数の公式 $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ および $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

に代入すると，次式を得る.

$$\frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1 \quad \text{...(a)}$$

x=一定なら双曲線

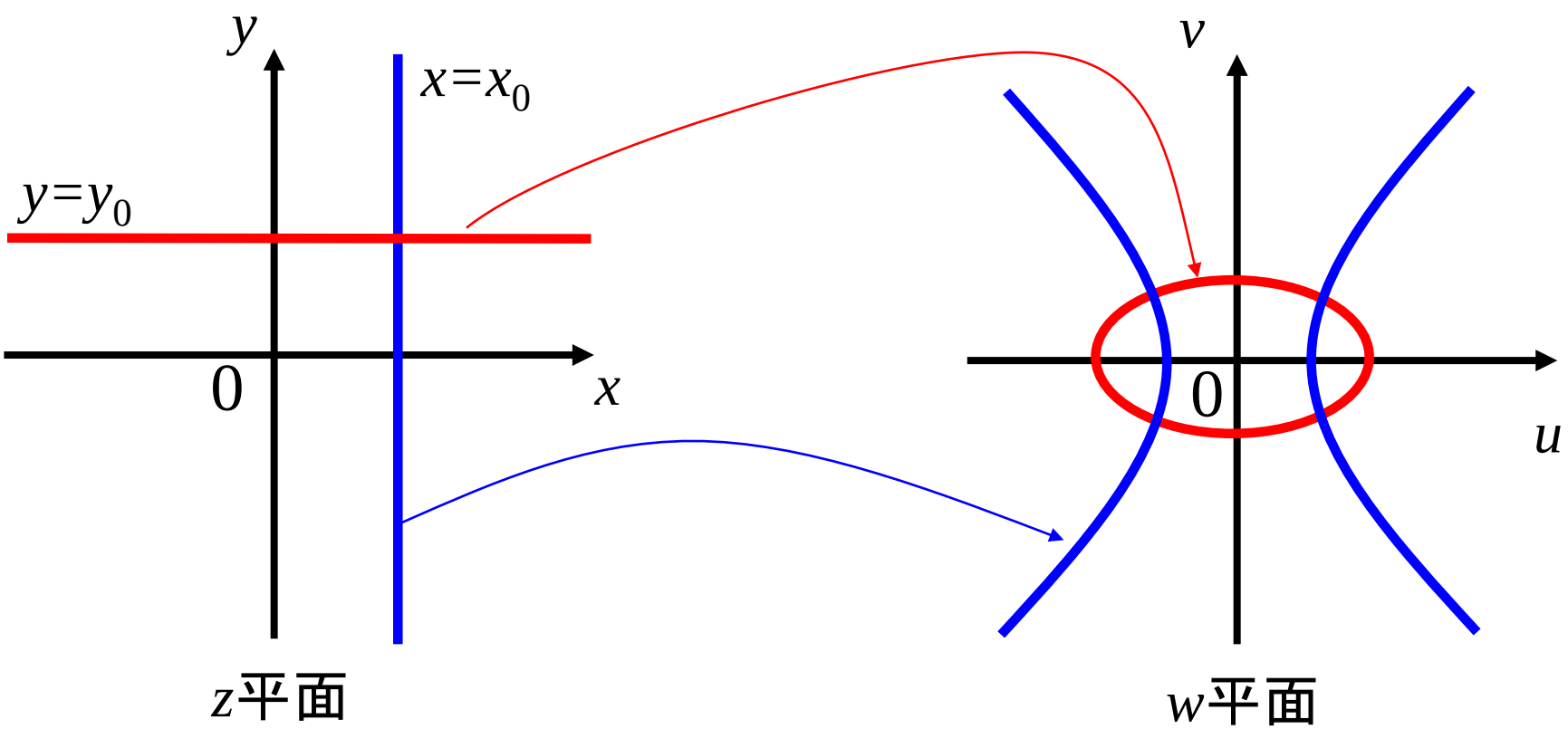
$$\frac{u^2}{\sinh^2 y} + \frac{v^2}{\cosh^2 y} = 1 \quad \text{...(b)}$$

y=一定なら楕円

$w=\sin z$ の写像

$$\frac{u^2}{\sin^2 x}-\frac{v^2}{\cos^2 x}=1$$

$$\frac{u^2}{\sinh^2 y}+\frac{v^2}{\cosh^2 y}=1$$



複素三角関数と実三角関数の違い

zを複素数とすると,

$|\cos z| \leqq 1$, $|\sin z| \leqq 1$ は成り立たない.

複素三角関数の絶対値に関する式には注意！

例題４．６

zが純虚数で $z = iy$ の場合に,

$$\lim_{y\to\infty}|\cos z|$$ を求めよ.

(解)

定義式に代入

$$\lim_{y\to\infty}|\cos(iy)| = \lim_{y\to\infty}\left|\frac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2}\right| = \frac{1}{2}\lim_{y\to\infty}\left|e^{y}+e^{-y}\right|$$

$$= \infty$$

$|\cos z| \leqq 1$ は成り立たない.

逆三角関数の定義

(1) $w = \cos^{-1} z \iff z = \cos w$

(2) $w = \sin^{-1} z \iff z = \sin w$

(3) $w = \tan^{-1} z \iff z = \tan w$

例題４．７

$w = \cos^{-1} z$ において, $z=x+iy$, $w=u+iv$ とする場合に, x, y を, u, v の関係式でそれぞれ示せ.

(解)

$z = \cos w$ に, z と w を代入すると

$$\Leftrightarrow \quad x + iy = \cos(u + iv)$$

(複素cosの加法定理) $$= \cos u \cosh v - i \sin u \sin v$$

実部と虚部を比較して

$$x = \cos u \cosh v, \quad y = -\sin u \sin v$$

双曲線関数・対数関数・べき関数

複素双曲線関数の定義

複素双曲線関数 $\cosh z$ と $\sinh z$ を次のように定義する.

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},\ \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad (5.1)$$

その他の双曲線関数はcoshとsinhにより定義する.

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z},\ \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},\ \mathrm{sech}\, z = \frac{1}{\cosh z},\ \mathrm{cosech}\, z = \frac{1}{\sinh z}$$

双曲線関数と三角関数の関係

双曲線関数の定義式(5.1) と三角関数の定義式(4.4)の z を iz で置き換えると,次の関係式が導かれる.

$$\cosh iz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, \qquad \sinh iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}\frac{i}{i} = i \sin z$$

$$\cos iz = \frac{e^{i \cdot iz} + e^{-i \cdot iz}}{2} = \cosh z, \qquad \sin iz = \frac{e^{i \cdot iz} - e^{-i \cdot iz}}{2i} = i \sinh z$$

例題５．１

$\cosh\left(1+\frac{\pi}{2}i\right)$ を計算して，

(実部)+i(虚部) の形で示せ．

(解)

$$\cosh\left(\boxed{1+\frac{\pi}{2}i}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\boxed{1+\frac{\pi}{2}i}}+e^{-\left(\boxed{1+\frac{\pi}{2}i}\right)}\right)=\frac{1}{2}\left(e\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}+e^{-1}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}i}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{e\cdot\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{\to 0}+i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{\to 1}\right)+e^{-1}\cdot\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{\to 0}-i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{\to 1}\right)\right\}$$

$$=\frac{i}{2}\left\{e-\frac{1}{e}\right\}$$

双曲線関数の加法定理

1） $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$

2） $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_2 \cosh z_1$

3） $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

3）は，双曲線関数の定義式(5.1)より得られる.

$$\boxed{\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}}$$

例題５．２

$$\cosh(z_1+z_2)=\cosh z_1\cosh z_2+\sinh z_1\sinh z_2$$

を示せ．

(解)

右辺から左辺を導こう．各項に定義式を代入

$$(\text{右辺})=\frac{e^{z_1}+e^{-z_1}}{2}\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2}+\frac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}\frac{e^{z_2}-e^{-z_2}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{z_1+z_2}+e^{z_1-z_2}+e^{-z_1+z_2}+e^{-z_1-z_2}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{z_1+z_2}-e^{z_1-z_2}-e^{-z_1+z_2}+e^{-z_1-z_2}\right)$$

キャンセル　キャンセル

$$=\frac{1}{2}\left(e^{z_1+z_2}+e^{-(z_1+z_2)}\right)\quad=\cosh(z_1+z_2)$$

例題５．３

$\cosh z = 0$ を解け.

(解)

$\cosh z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2} = 0$ の両辺に e^{z} をかけると

$$\Leftrightarrow \quad e^{2z} + 1 = 0$$

e^{z} に関する2次方程式を解くと

$$e^{z} = \pm\sqrt{-1} = \pm i = e^{\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i}$$

よって，指数同士を比較して

$$z = \left(\pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

・純虚数である

・無限個の解が存在する

例題５．４

$\cosh\left(2-i\dfrac{\pi}{2}\right)$ を $u+iv$ の形式で示せ.

(解) coshの定義式に代入すると

$$\cosh\left(2-i\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\left\{e^{\left(2-\frac{\pi}{2}i\right)}+e^{-\left(2-\frac{\pi}{2}i\right)}\right\}=\frac{1}{2}\left\{e^{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}+e^{-2}e^{\frac{\pi}{2}i}\right\}$$

オイラーの公式を適用して

$$=\frac{e^{2}}{2}\left\{\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{\to 0}+i\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{\to 1}\right\}+\frac{e^{-2}}{2}\left\{\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{\to 0}+i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{\to 1}\right\}$$

$$=\frac{i}{2}\left(-e^{2}+e^{-2}\right)$$

複素対数関数の定義

指数関数 $w=e^z$ の逆関数として対数関数を定義する.

すなわち, wとzを入れ替えて,

$$z=e^w$$

を満たすzの関数wを, 対数関数と呼び, 次のように定義する.

$$w=\log z \qquad (\text{ただし, } z\neq 0)$$

複素数でも実数と同様, $z=e^w\neq 0$ であることから,
$z=0$ を除いた領域で定義される.

logの多価性

$z=e^w$に，$w=u+iv$ および極形式の指数表示 $z=re^{i\theta}$ 式(4.3)を代入すると，

$$e^w=e^{u+iv}=e^u e^{iv}=z=re^{i\theta}$$

$$\begin{cases} \text{大きさの比較から，} e^u=r \Leftrightarrow u=\log r \ \text{(実数)} \\ \text{偏角の比較から，} v=\theta \end{cases}$$

よって $w=\log z$ は次のように表される.

$$w=\log z=u+iv=\log r+i\theta$$

(ただし，$r=|z|$, $\theta=arg\ z$)

$z=re^{i\theta}$ の偏角θには2πの周期性があるから，$\log z$の値は無限通り存在する．

$\Rightarrow$ 無限多価関数

このような場合は主値を定めるのであった．

すなわち，偏角の主値Argに対応させて，$\log z$ の主値を次のように定め，大文字で $\mathrm{Log}\, z$ と表す．

これは複素関数としてのlogではなく,実関数としてのlog

$$\boxed{\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i\, \mathrm{Arg}\, z}$$

（たとえば $-\pi < \mathrm{Arg}\, z \leqq \pi$）

複素対数関数の定義

（主値による表現）

$$\boxed{\log z = \mathrm{Log}\, z + 2n\pi i} \qquad (5.3)$$

$(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

２つ併せて，

これは複素関数としてのlogではなく,実関数としてのlog

$$\boxed{\log z = \log |z| + i\, \mathrm{Arg}\, z + 2n\pi i}$$

複素関数としてのlog

$(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

(実部)＝zの大きさの実対数

(虚部)＝zの偏角

(5.3)'

単純な数のlogが意外な値を持つ．たとえば，

$$\log 1 = \underbrace{\log|1|}_{0} + i\,\underbrace{\mathrm{Arg}\,1}_{0} + 2n\pi i$$

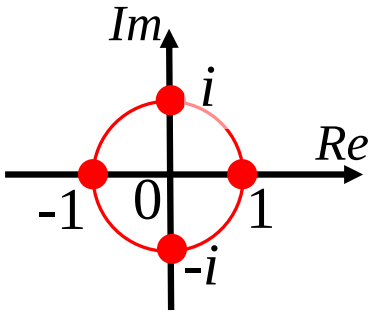
$$= \quad 0 \quad + i\,0 \quad + 2n\pi i$$

実部は0(一定)だが，虚部は無限個の値をもつ．

実数関数としてのlog1=0は，複素関数としてのlog1の表式の，n=0に対応している．

例題５．５　　次の複素関数の値を求めよ.

ただし，偏角の主値範囲を $0 \leqq \mathrm{Arg}\, z < 2\pi$ とする.



(1) Log 1

(解)

Logの定義式

$$\mathrm{Log}\,1 = \log|1| + i\,\mathrm{Arg}\,1 = 0 + \mathrm{i}\,0 = 0$$

(2) log(-1)

(ただし，n=0,±1, ±2,....)

logの定義式

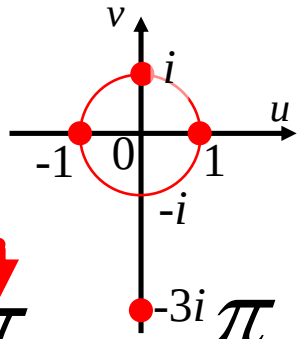
$$= \log\overbrace{|-1|}^{1} + i\left\{\mathrm{Arg}(-1) + 2n\pi\right\}$$

$$= 0 + i\left\{\pi + 2n\pi\right\}$$

$$= (1+2n)\pi i$$

例題５．５　　次の複素関数の値を求めよ.

ただし，偏角の主値範囲を $0 \leqq \mathrm{Arg}\, z < 2\pi$ とする.



(2) Log i

(解)

Logの定義式

$$\mathrm{Log}\, i = \log|i| + i\,\mathrm{Arg}(i) = 0 + \frac{\pi}{2} i = \frac{\pi}{2} i$$

log1

(2) log(-3i)

(ただし，n=0,±1, ±2,....)

logの定義式

$$= \log\overbrace{|-3i|}^{3} + i\left\{\mathrm{Arg}(-3i) + 2n\pi\right\}$$

$$= \log 3 + i\left\{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right\}$$

$$= \log 3 + (3/2 + 2n)\pi i$$

nを整数倍ずらしても等価(教科書p.29)

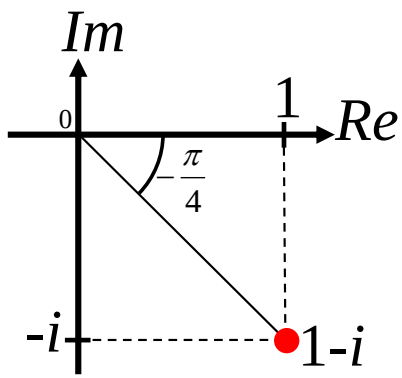
例題５．６　$\log(1-i)$ を，$u+iv$の形で表せ．

(解)

定義式(5.3)

$$\log(1-i) = \log|1-i| + i\{\mathrm{Arg}(1-i) + 2n\pi\}$$

1-i の絶対値と偏角は，左下の図から



$$\begin{cases} |1-i| = \sqrt{2} & \text{（正方形の対角線）} \\ \mathrm{Arg}(1-i) = -\dfrac{\pi}{4} & \text{（}-\pi \leqq \mathrm{Arg}\, z < \pi \text{ とした）} \end{cases}$$

よって，

$$\log(1-i) = \log\sqrt{2} + i\left\{-\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 + i\left\{-\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right\}$$

(ただし，n=0,±1, ±2,....)

対数関数の公式

1） $\log z_1 + \log z_2 = \log z_1 z_2$

証明）

$\log z_1 = w_1$, $\log z_2 = w_2$ とおくと, $z_1 = e^{w1}$, $z_2 = e^{w2}$

指数関数の公式 $e^{w1}e^{w2} = e^{w1+w2}$ を用いると

$z_1 z_2 = e^{w1}e^{w2} = e^{w1+w2}$. ここでlogの定義より

$w_1 + w_2 = \log z_1 z_2$ ⇔（与式）

2） $\log z_1 - \log z_2 = \log \dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$

注意

- 前ページの公式をはじめ，対数関数に関する関係式は，対数関数が無限多価であることに注意.
- 例えば，前ページの公式は，n=0,±1,±2,....と無限に存在する値の中のどれかで成り立つ，という意味になる．一例を挙げると，

$$\mathrm{Log}(1)=\mathrm{Log}((-1)\times(-1))=\mathrm{Log}(-1)+\mathrm{Log}(-1)$$

偏角の範囲を$-\pi<\mathrm{Arg}\,z\leqq\pi$とすると，例題5.5より(左辺)＝0，(右辺)$=\pi i+\pi i$となり矛盾.

しかし，右辺第2項の偏角の範囲を$-\pi\leqq\mathrm{Arg}\,z<\pi$と考えれば，$\mathrm{Log}(-1)=-\pi i$ となるから(右辺)=0となって矛盾は解消される．(主値のみに着目していると危ない場合がある．対数関数は結局のところLogではなくlogである，ということを忘れない)

多価関数同士の＝（等号）？

- 多価関数の値は一つではないため，
  値の「集合」を意味する.
- 右辺$f(z)$と左辺$g(z)$がそれぞれ多価関数のとき、それらを等号で結んだ式

  $f(z) = g(z)$　　の意味は，

たとえば$f(z)$の値の集合と，$g(z)$の値の集合の双方に，お互いに等しい要素が必ず一つは存在する，という意味になる.

- 値の異なる要素同士を比較すれば，（等号で結ばれているにもかかわらず）当然等しくない.

$w=\mathrm{Log}\, z$ の写像

- logは無限多価なので，写像は主値Logに限定して考える.

$z = re^{i\theta}$ なので，$\mathrm{Log}\, z = \log r + i\theta = u+iv \quad (r>0)$

偏角の範囲を$-\pi < \theta(=\mathrm{Arg}\, z) \leqq \pi$とする.

z平面上でθを固定してrを変数(>0)とすると、z平面上では原点を除く半直線が，w平面上では$u=\log r$の直線に移る.
偏角θの範囲が$-\pi < \mathrm{Arg}\, z \leqq \pi$であることに注意する.

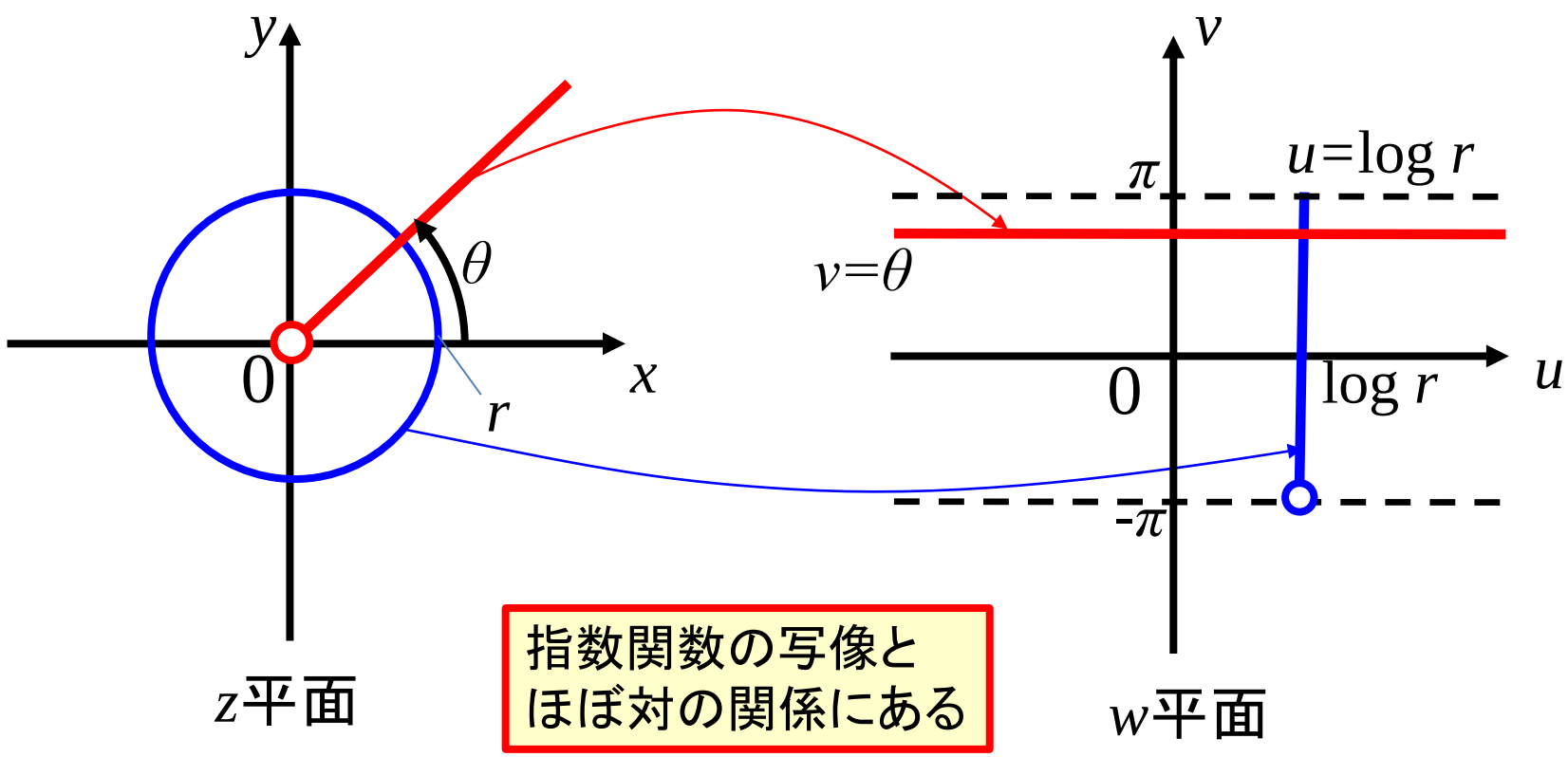
z平面上でrを固定してθを変数とすると、z平面上では半径rの円が，w平面上では$v=\theta$の直線になる.

$w=\mathrm{Log}\, z$ の写像

$z = re^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Log}\, z = \log r + i\theta = u+iv \quad (r>0)$

偏角の範囲: $-\pi < \mathrm{Arg}\, z(=\theta) \leqq \pi$

$$\begin{cases} u=\log r \\ v=\theta \end{cases}$$



指数関数の写像と
ほぼ対の関係にある

複素べき関数の定義

実数a,bのべき $a^b = e^{\log a^b}$ を拡張して，複素べき関数を定義する.

$$\boxed{z^a = e^{a \log z}} \quad (a\text{は複素数}) \tag{5.4}$$

aが正の整数のときはa回乗ずる, 負の整数なら逆数をとり，１／(整数)ならn乗根の公式と等価.これら個別の公式は式(5.4)で統一的に表される.

定義に$\log z$を含むので，多価性を考慮すると，実数のべき乗と同じ計算規則が成り立たない場合がある. (aが整数のときは問題が少ない.)

各種計算規則を式(5.4)に戻って導出・証明ができるようにしておくこと.

1）aが正の整数(m=1,2,3,....)の場合

$$z^m \overset{\text{定義}}{=} e^{m\log z} \overset{\log\text{の定義}}{=} e^{m(\mathrm{Log}\,z+2n\pi i)} \overset{\text{指数の規則}}{=} e^{m\mathrm{Log}\,z}\underbrace{e^{m2n\pi i}}_{\to 1} = e^{m\mathrm{Log}\,z}$$

多価性を示すnが消えてしまったので，
この時点でz^mは**一価関数**であるとわかる．実際，

$$= e^{m\mathrm{Log}\,z} = \underbrace{e^{\mathrm{Log}\,z}\cdot e^{\mathrm{Log}\,z}\cdot e^{\mathrm{Log}\,z}\ldots\cdot e^{\mathrm{Log}\,z}}_{m\text{個}}$$

$$= \underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\ldots\cdot z}_{m\text{個}} = \underline{z^m}$$

と，一意に元の値に戻ってくる．

2）$a=1/m$ (mは正の整数)の場合

$z^a = e^{a\log z}$

定義

log z の定義と $z=re^{i\theta}$

$$z^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m}\log z} = e^{\frac{1}{m}\{\log r + i(\theta+2n\pi)\}}$$

$$= e^{\log r\cdot\frac{1}{m}} e^{i(\frac{\theta}{m}+\frac{2n\pi}{m})}$$

$$= r^{\frac{1}{m}} e^{i(\frac{\theta}{m}+\frac{2n\pi}{m})}$$

（m乗根）

n乗根の表式で確認したとおり，上の式は

$\underbrace{n=0, 1, 2, \ldots, m-1}_{m個}$ の異なる値をとるので，m価関数である.

3）$a=l/m$ かつ $m \geqq 2$ の場合

（ただし，l,m は互いに素）　　（aが有理数の場合）

logの定義と$z=re^{i\theta}$

$$z^{\frac{l}{m}} \overset{\text{定義}}{=} e^{\frac{l}{m}\log z} = e^{\frac{l}{m}\{\log r + i(\theta+2n\pi)\}} = e^{\log r \cdot \frac{l}{m}} e^{i(\frac{l}{m}\theta + \frac{2ln\pi}{m})}$$

$$= \sqrt[m]{r^l}\, e^{i(\frac{l\theta}{m} + \frac{2ln\pi}{m})}$$

lとmは規約なので $e^{i(\frac{2ln\pi}{m})}$ の偏角 $\dfrac{2ln\pi}{m}$ は

n=0, 1, 2,...., m-1 で異なる偏角を表し，それ以降は（$2\pi \times l$）

回転ごとに同じ値を繰り返すので，結局，m価関数である.

（aが無理数の場合はm→無限大のアナロジーから，無限多価となる）

4）aが複素数の場合

aが複素数の場合の，z^aの絶対値と偏角の表式を求めてみよう．

$a=p+iq$ とおいて定義式に代入すると

$$z^a \overset{\text{定義}}{=} e^{a\log z} \overset{\text{代入}}{=} e^{(p+iq)\{\log r+i(\theta+2n\pi)\}}$$

logの定義と$z=re^{i\theta}$

$$= e^{p\cdot\log r-q(\theta+2n\pi)}e^{i\{q\cdot\log r+p(\theta+2n\pi)\}}$$

$$= r^p e^{-q(\theta+2n\pi)}e^{i\{q\cdot\log r+p(\theta+2n\pi)\}}$$

よって，絶対値 $|z^a|$ を，$r=|z|$を用いて表すと，

$$\left|z^a\right| = \left|z\right|^p e^{-q(\theta+2n\pi)}$$

また，偏角は，2πの整数倍$(2l\pi)$加えても等価なことから

$$\arg z^a = q\cdot\log|z| + p(\theta+2n\pi)+2l\pi \quad \begin{matrix}(n=0,\pm1,\pm2,....)\\(l=0,\pm1,\pm2,....)\end{matrix}$$

なお，$q\neq0$の場合，$|z^a|$を見ると，$n=0,\pm1,\pm2...$により，z^aは無限多価(周期的に同じものが現れない)なことがわかる．また，例え$q=0$であっても，偏角を見ると，pが無理数なら$2pn\pi$の回転によって同じ偏角に重ならないので無限多価である．（lについては1回転ごとに同じ点に重なるから多価性とは無関係）

例題5．7　i^i を，$u+iv$の形で表せ．

(解)

定義式(5.4)に $z=i$, $a=i$ を代入

logの定義

$$i^i \overset{\downarrow}{=} e^{i\log i} = e^{i\{\underbrace{\log|i|}_{\log 1=0}+i(\underbrace{\mathrm{Arg}\, i}_{\pi/2}+2n\pi)\}} = e^{ii\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}$$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}$$

(ただし，$n=0,\pm1,\pm2,\ldots$)

よって，上の式が実部uそのものであり，虚部vは0である．

直感に反して（？），無限多価の**実数値**となる．

まとめ:本日の確認事項

- 複素関数と実関数の違いを説明できる
- 境界，領域，範囲の定義を説明できる
- １価関数と多価関数の違いを説明できる
- 写像を例を使って説明できる
- 一次変換を求め，図示できる
- 複素指数関数の定義式を示し計算できる
- 極形式の複素数を指数表示できる
- 複素三角関数の定義を示し，指数関数に変換できる
- 実数と複素数のオイラーの公式を使うことができる
- 指数関数，三角関数を含む方程式を解くことができる
- 複素双曲線関数の定義式を示し，計算できる
- 複素対数関数の定義を示し，計算できる
- 双曲線,対数,べき関数を含む方程式を解くことができる