# 物理学演習第一-d-D(大木)No.4

2017.6.20

【1】《レビ・チビタ記号》
(i)$\epsilon_{ijk} = \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k)$ を確かめよ. ただし、$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ は正規直交基底である.
(※) このことは $\epsilon_{ijk}$ が $\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k$ の $i$ 成分 $(\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k)_i$ であることを意味する.
(ii)$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{ji}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ を証明せよ.

【2】《角運動量と力のモーメント》
(i) 以下の式を示せ.

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{B}}{dt} \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \frac{d\boldsymbol{B}}{dt} \tag{2}$$

(ii) 角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ を時間微分して、力のモーメント $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ との関係を調べよ.
(iii)(ii) の結果を用いて、角運動量と力のモーメントの観点から単振り子の運動方程式を解け.
(iv) 質点の運動で角運動量 $\boldsymbol{L}$ が保存される場合、その質点の運動はある平面内に限られることをベクトル積の性質から説明せよ.

【3】《ベクトル解析その 1》
レビ・チビタ記号を用いて、次の式を証明せよ.

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0 \tag{4}$$

【4】《ベクトル解析その 2》
(i) 極座標表示の $\nabla$ を用いて、$\nabla r^n$ を計算せよ.
(※) 講義で扱ったのが $n = -1$ の場合である.
(ii) デカルト座標系でも $\nabla r^n$ を計算し、(i) と一致することを確かめよ.
(iii) 極座標表示を用いて $\nabla \cdot (\boldsymbol{r} f(r)) = 3f(r) + r\frac{df(r)}{dr}$ を証明せよ. ただし $f(r)$ は $r$ にのみ依存し、$r$ で微分可能な関数である.
(※) 講義で扱ったのが $f(r) = 1$ の場合である.
(iv) デカルト座標系でも $\nabla \cdot (\boldsymbol{r} f(r))$ を計算し、(iii) と一致することを確かめよ.