



物理学演習第一-d-D(大木)No.3

2017.5.16

【1】《ポテンシャルエネルギーと運動範囲》

質点 m がポテンシャル

$$U(x) = \frac{ax_0^2}{x^2} - \frac{3ax_0}{x} \quad (1)$$

中で 1 次元運動をしている。ただし、 a と x_0 は正の定数で、 $x > 0$ である、

(i) a と x_0 の次元は何か。

(ii) 質点のエネルギーが

$$E = -\frac{5a}{4} \quad (2)$$

であるとき、質点の運動範囲を求めよ。

(iii) (ii) の条件でポテンシャルの底で質点の速さはいくらか。

(iv) 質点を無限遠まで到達させるためにはポテンシャルの底での質点の速さをいくらにすればよいか。

【2】《線積分》

(i) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x, 0)$ であるとき、4 つの経路 C_1, C_2, C_3, C_4 に沿った線積分

$$W_1 = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad W_2 = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad W_3 = \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad W_4 = \int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1)$$

を計算せよ。ただし

$C_1 : (0, 0) \Rightarrow (1, 1)$ の直線。

$C_2 : (0, 0) \Rightarrow (1, 0) \Rightarrow (1, 1)$ の折れ線。

$C_3 : (0, 0) \Rightarrow (0, 1) \Rightarrow (1, 1)$ の折れ線。

$C_4 : y = x^2$ に沿って $(0, 0) \Rightarrow (1, 1)$ 。

(※) ヒント：媒介変数を用いるとよい。

(ii) (i) の $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の代わりに $\mathbf{G}(\mathbf{r}) = (y, 0)$ として、4 つの経路 C_1, C_2, C_3, C_4 に沿った線積分

$$W'_1 = \int_{C_1} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}, \quad W'_2 = \int_{C_2} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}, \quad W'_3 = \int_{C_3} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}, \quad W'_4 = \int_{C_4} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} \quad (2)$$

を計算せよ。経路の $C_1 \sim C_4$ は (i) と同じものである。

(iii) (i)(ii) の結果を見て当然気づくべき重要なことは何か。

【3】《線積分》

(i) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x, 0, 0)$ であるとき, 2つの経路 C_1, C_2 に沿った線積分

$$W_1 = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad W_2 = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1)$$

を計算せよ. ただし

C_1 : $(1, 0, 0)$ から xy 平面上の単位円周に沿って反時計回りで $(0, 1, 0)$ へ.

C_2 : $(1, 0, 0)$ から xy 平面上の単位円周に沿って時計回りで $(0, 1, 0)$ へ.

(ii) (i) の $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ の代わりに $\mathbf{G}(\mathbf{r}) = (y, 0, 0)$ として, 2つの経路 C_1, C_2 に沿った線積分を計算せよ.

(※) $\mathbf{G}(\mathbf{r}) = (0, y, 0)$ の間違いではない, おかしな誤解をする学生がときどきいるので, 念のため.

【4】《円筒座標系とベクトル解析》

円筒座標系 (ρ, ϕ, z) における ∇ は次のようになる. ただし, デカルト座標との関係は $x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, z = z$ である.

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1)$$

この式を講義と同様にして証明せよ.