2018 年 2 月 5 日 10 時 45 分 ∼12 時 15 分
山田光太郎 (2018 年 2 月 8 日; Ver. 3)
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 定期試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読み, 理解できるように書いてください.
- 裏面は下書き, 計算などに使用できますが，採点の対象とはしません.
- 答案は 2 月 13 日以降に**数学事務室 (本館 3 階 332B)** にて返却いたします.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は，2018 年 2 月 24 日までに山田まで電子メイルでお申し出ください．なお，管理の都合上，上記期日以降のクレイムは，<u>たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません</u>.

指定用紙のみ持込可

定理 A: 関数 f が a と $a+h$ を含む区間で C^∞-級ならば，任意の正の整数 n に対して，

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k+R_{n+1}(h),\qquad R_{n+1}(h)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1},\qquad 0<\theta<1$$

を満たす θ が存在する．とくに $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}=0$ である.

定義 B: 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは，任意の正の実数 ε に対して，次をみたす番号 N が存在することである:「$n\geqq N$ をみたすすべての番号 n に対して $|a_n-\alpha|<\varepsilon$」.

定義 C: 数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であるとは，任意の正の実数 ε に対して，次をみたす番号 N が存在することである:「$m,n\geqq N$ をみたすすべての番号 m, n に対して $|a_m-a_n|<\varepsilon$」.

定義 D: 関数 f が $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ をみたすとは，任意の正の実数 ε に対して，次をみたす正の数 δ が存在することである:「$0<|x-a|<\delta$ をみたす任意の x に対して $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$」.

定理 E: 絶対収束する級数は収束する.

定理 F: 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が，ある番号 N から先の各番号 n に対して $0\leqq a_n\leqq b_n$ を満たすとき，級数 $\sum b_n$ が収束するならば，$\sum a_n$ も収束する.

定義 G: $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$.

問題 A 文中の $\boxed{1}$ ∼ $\boxed{30}$ に最も よく充てはまる数・式・記号を入れ，下線 **a** の不等式を示しなさい.

[40 点]

円周率 π は $0.6<\dfrac{\pi}{\boxed{1}}$ を満たす [1]．関数 $f(x)=\cos x$ に対して，$a=0$, $h=x$, $n=5$ として定理 **A**（冒頭枠内）を適用すると,

$$\cos x=\boxed{2}+\boxed{3}x+\boxed{4}x^2+\boxed{5}x^3+\boxed{6}x^4+\boxed{7}x^5+R_6(x),$$
$$R_6(x)=\boxed{8}\quad(0<\theta<1)$$

と書ける．とくに $x=0.6$ とすると $\cos 0.6=\boxed{9}+R_6(0.6)$, $_{\mathbf{a}}\underline{\boxed{10}<R_6(0.6)<\boxed{11}}$ が成り立つ [2] ので，$\cos 0.6=\boxed{12}.\boxed{13}\boxed{14}\boxed{15}\boxed{16}\boxed{17}\boxed{18}\boxed{19}\boxed{20}\boxed{21}\dots$ [3]．一方,

$$\tanh x=\boxed{22}+\boxed{23}x+\boxed{24}x^2+\boxed{25}x^3+\boxed{26}x^4+R_5'(x),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{R_5'(x)}{x^{\boxed{27}}}=0$$

となるので [4]，定数 a, b に対して極限値

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+ax\tanh x+b}{\sin^2 x\bigl(\log(1+x)-x\bigr)}$$

が存在するための条件は $a=\boxed{28}$, $b=\boxed{29}$ で，そのときの極限値は $\boxed{30}$ となる.

---

[1] $\boxed{1}$ には条件を満たす正の整数のうち最大のものを入れる.

[2] $\boxed{9}$, $\boxed{10}$, $\boxed{11}$ には小数が入る．10 の指数を用いた表示でもよい.

[3] $\boxed{12}$–$\boxed{21}$ には，0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 または × を入れる．上の推論から桁の数字が確定する場合はその数字を，そうでない場合は × を入れよ.

[4] $\boxed{27}$ には，条件をみたす最大の整数が入る.

問題 B 文中の $\boxed{1}$〜$\boxed{8}$ に最もよく充てはまる数・式・×を入れなさい． [20 点]

2 変数関数 $f(x,y)=x^3-xy+y^3$ の偏導関数は $\boxed{1}$ であるから，これらがすべて 0 になるのは，x 座標が小さい順に $(x,y)=\boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}$ である[5]．また f の 2 次偏導関数は $\boxed{6}$ であるから，f が極大値をとる点をすべて挙げると $(x,y)=\boxed{7}$, f が極小値をとる点をすべて挙げると $(x,y)=\boxed{8}$ である[6]．

問題 C 文中の $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$ に最もよく充てはまる数・式・記号（問題冒頭の定理の記号，文中下線の記号）を入れなさい． [25 点]

次の定理を証明しよう：

> 数列 $\{a_n\}$ に対して，極限値 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\alpha$ が存在し，かつ $\alpha<1$ が成り立つならば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ は収束する．

証明： 仮定より $1-\alpha>0$ なので，$\sqrt[n]{|a_n|}$ の極限値が α であることから，
$_{\mathbf{a}}$<u>次のような番号 N が存在する</u>：$n\geqq N$ を満たす任意の n に対し

$$(*)\qquad \left|\sqrt[n]{|a_n|}-\alpha\right|<\boxed{1}.$$

式 $(*)$ は $\alpha-\boxed{1}<\sqrt[n]{|a_n|}<\alpha+\boxed{1}$ と書き換えられるから，$n\geqq N$ をみたす任意の n に対して

$$\sqrt[n]{|a_n|}<r \qquad \text{すなわち} \qquad |a_n|<r^n \qquad \text{ただし} \qquad r:=\alpha+\boxed{1}$$

$_{\mathbf{b}}$<u>が成り立つ</u>．ここで，r は不等式 $\boxed{2}$ を満たすので，$_{\mathbf{c}}$<u>級数 $\sum r^n$ は収束</u>する．したがって 定理 $\boxed{3}$ より $_{\mathbf{d}}$<u>$\sum|a_n|$ は収束</u>する，さらに，定理 $\boxed{4}$ から $_{\mathbf{e}}$<u>級数 $\sum a_n$ も収束</u>する．□
とくに，下線 **a**〜**e** をつけた部分のうち「実数の連続性」を用いている箇所を全て挙げると $\boxed{5}$ である．

類似の議論で，極限値 α が $\alpha>1$ を満たせば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ が発散することもわかる．

問題 D [15 点] 次は正しいか．理由をつけて答えなさい．

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するならば $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ である．

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ならば級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する．

(3) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束し，極限値 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\alpha$ が存在するならば，$\alpha<1$ である．

(4) ~~$0.999\cdots=1$．ただし左辺は "9" が繰り返す循環小数である．~~

問題 E [0 点] 何か言い残すことがあればお書きください．回答の内容が成績に影響することは一切ありません．

おつかれさまでした ♡

[5] 条件をみたす (x,y) の組は 4 組以下である．答えが 4 組未満の場合は，余った解答欄に×印を入れよ．

[6] $\boxed{7}$–$\boxed{8}$: 該当する点がない場合は，解答欄に×を入れよ．

微分積分学第二 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：1/2-8/9/10–11+a/12–21/22–27/28–29/30: 各 5 点

1	2	3	4	5	6	7	8
5	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{-x^6}{720}\cos\theta x$

9	10	11
0.8254	-7×10^{-5}	-3×10^{-5}

下線 a の理由：

$$R_6(0.6)=\frac{-(0.6)^6}{720}\cos(0.6\theta)\geqq\frac{-(0.6)^6}{720}\cos 0=-\frac{3^6}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot5^6}$$
$$=-\frac{3^4}{2^4\cdot5^7}=-\frac{3^4\cdot2^3}{10^7}=-81\times8\times10^{-7}=-648\times10^{-7}\geqq-7\times10^{-5}$$
$$R_6(0.6)\leqq\frac{-(0.6)^6}{720}\cos 0.6\leqq\frac{-(0.6)^6}{720}\cos\frac{\pi}{5}\leqq\frac{-(0.6)^6}{720}\cos\frac{\pi}{4}\leqq\frac{-(0.6)^6}{720}\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\frac{-(0.6)^6}{720}\frac{1}{2}$$
$$=\frac{-3^6}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot5^6}=\frac{-3^4}{2^5\cdot5^7}=\frac{-3^4\cdot2^2}{10^7}=-324\times10^{-7}\leqq-3\times10^{-5}$$

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	8	2	5	3	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

22	23	24	25	26	27
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	4

28	29	30
$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{4}$

- 計算間違いをしてもそこからの計算が正しければ正解としています.
- ただし cos の値が 1 より大きくなっているものはそのあたりすべて 0 点となっています.
- 逆にそれ以前の解答から得られる値と違っているものは，そこだけ取り出せば正しくても不正解にしています.「最もよく充てはまる」は「. . . のとき」「となるので」などの文脈まで含めてあてはまることだと思います.

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第二 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：1/2–5/6/7–8: 各 5 点

1 $f_x = 3x^2 - y, \quad f_y = 3y^2 - x$			
2 $(0,0)$	3 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	4 ×	5 ×
6 $f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = f_{yx} = -1, \quad f_{yy} = 6y$			
7 ×		8 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	

問題 C の解答欄 配点：各 5 点

1	2	3	4	5
$\dfrac{1-\alpha}{2}$	$0 < r < 1$	**F**	**E**	**d,e**

- 問題 C1: 「任意の ε」からは何も示せません.
- 問題 C5: a, c は実数の連続性とは独立です.

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第二 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 D の解答欄 配点：各 5 点

(1) [○] ← 正しければ○，誤りなら×を入れる

級数 $(\star)$ の和を s と書くと，$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ （$n=1,2,\dots$）で定まる数列 $\{s_n\}$ は s に収束する．この数列の番号を一つずらした数列 $\{s_{n-1}\}$ も s に収束するから，

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0 \qquad (n \to \infty)$$

となる．

「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\alpha \neq 0$ とすると」から始まる解答は不正解．実際,「$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$」の否定は「$\{a_n\}$ は発散（収束しない）するか，0 以外の数に収束する」です.

(2) [×] ← 正しければ○，誤りなら×を入れる

$a_n = \dfrac{1}{n}$ とすると，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ であるが，級数 $\sum a_n$ は発散する．

(3) [×] ← 正しければ○，誤りなら×を入れる

$a_n = 1/n^2$ $(n=1,2,\dots)$ とすると，$n \geqq 2$ に対して

$$\begin{aligned} s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &\leqq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqq 2 \end{aligned}$$

なので，数列 $\{s_n\}$ は上に有界な単調増加数列，したがって収束する．すなわち $\sum a_n$ は収束するが，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^2} = 1$$

である．

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第二 定期試験 〔解答用紙 4〕

この用紙には，問題 E への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 E [0 点] 何か言い残すことがあればお書きください．回答の内容が成績に影響することは一切ありません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2017 年度入学の方は，学籍番号のうち “17B” を除いた番号の席に着席してください．
- それ以外の方は，ご自分の名前のある席に着席してください．
- **座席表に学籍番号・氏名がない方は監督者まで申し出てください**．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持込用紙・必需品（電話・時計不可）以外の物を鞄に入れ，机の下か足下に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
- 解答用紙 4 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．5 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．
- 原則として**途中退室は認めません**．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を各列の黒板に向かって**右端**から左へ，**左端**まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最前列の席の方は，答案用紙の束を机の上におき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号			-							氏名	