2018 年 1 月 19 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二講義資料 10

前回の補足

- 講義で示した「$p<-1$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} n^p$ は収束」の証明の誤りをご指摘いただきいたので，以下修正：
  p は負の実数だから，$f(x):=x^p$ $(x>0)$ は単調減少．したがって，2 以上の整数 n に対して，区間 $[n-1,n]$ 上の各 x に対して $x^p \geqq n^p$．これを用いて，$\underline{1+p<0 \text{ に注意すると}}$（ご指摘ありがとう）
  $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n^p &= 1+\sum_{n=2}^{N}\int_{n-1}^{n} n^p\,dx \leqq 1+\sum_{n=2}^{N}\int_{n-1}^{n} x^p\,dx = 1+\int_1^N x^p\,dx = 1+\frac{1}{1+p}(N^{p+1}-1)\\ &= 1+\frac{1}{|1+p|}(1-N^{p+1}) \leqq 1+\frac{1}{|1+p|}.\end{aligned}$$
  右辺は N によらない定数だから，部分和は上に有界．与えられた級数は正項級数だから，収束する．
- 深入りしない，と言ったはずだが，講義ノート 50 ページの下から 3 行目の例を挙げてほしい，という質問が 2 件：
  $\log 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$, したがって $\frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\dots$. これらの和をとると
  $$\frac{3}{2}\log 2 = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{8}+\dots$$
  となる．右辺の級数の項は，最初の $\log 2$ に収束する級数と同じ項からなる．

前回までの訂正

- $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ を $\zeta(-2)$ と黒板に書いたようですが，$\zeta(2)$ の間違いです．
- 講義資料 8，1 ページ，下から 8 行目：例えば $\Rightarrow$ 例えは
- 講義資料 8，1 ページ，下から 3 行目のコメント「ですか」が誤りというご指摘ですが，このままでよくないですか?
- 講義資料 8，2 ページ，質問 7 の冒頭：実数とな $\Rightarrow$ 実数とは
- 講義資料 8，3 ページ，質問 14 の 2 行目：ε にうちての $\Rightarrow$ ε についての

授業に関する御意見

- 前回のコメントの返答：なんで悲しいの？ $\longrightarrow$ 干支 3 回りくらい離れたオジサンに似ているといわれたらそりゃ悲しくなりますよ。°（°´Д｀°）°。もし山田光太郎が超イケメンだったら話しは別ですが. . . 笑　**山田のコメント：** わるかったね.
- このクラスを 100 人受講していて，金曜日に配られるプリントの質問，意見の数が 40 コだった．だから教室が寒いんだと思った．　**山田のコメント：** そうそう．
- なんで染川先生の髭はあんなに長いんですか？（直接聞けません）　**山田のコメント：** 山田も聞けません.
- ζ って書くの難しいですよね.　**山田のコメント：** そう?
- δ と 8 がうまく書き分けられません.　**山田のコメント：** 書き分けられています.
- 説明はわかりやすくて理解しやすいです.　**山田のコメント：** そうですか?
- ありません．/特になし　**山田のコメント：** ですか.

質問と回答

質問 1：　$\{s_n\}$ が Cauchy 列であることの定義として，「$\forall m, \forall n \geqq N \Rightarrow |s_m - s_n| < \forall\varepsilon(>0)$」（山田注：あまりお行儀のよい書き方ではありませんね）というものでしたが，$m=n+1$ と限定してしまうのは良くないことですか．条件が緩くなってしまうのでしょうか．

お答え：　良くないことです．$s_n=\sum_{k=1}^{n} 1/k$ とおくと，$m=n+1$ とおいた条件を満たしています．

質問 2：　講義資料の (5.3) の式で $p=-2$ の場合に $\sum_{n=1}^{\infty} n^p = \frac{\pi^2}{6}$ になる証明をしてほしいです．

お答え：　これは Basel 問題といって，Euler によって初めて和が求められたもの．由緒正しき問題であって，値を求める方法は自明ではない，というコメントを講義でしました．「バーゼル問題」で検索．

質問 3：　$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots=\frac{\pi^2}{6}$ $(=\zeta(-2))$（山田注：$\zeta(2)$．訂正の項参照）もテイラー展開のような関数の展開に実数を代入して（$\log 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots$ のように）求まったという流れなのでしょうか．　**お答え：**違います.

質問 4： ダランベールの判定法について，条件 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$ を $\exists N\in\boldsymbol{N}$, $n\geqq\boldsymbol{N}\Rightarrow\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{a_{N+1}}{a_N}=r$ に書き換えられないでしょうか．もしできたら級数の収束を証明するのに，ε-N 論法を使うことができるのではないでしょうか． **お答え：** $n\geqq\boldsymbol{N}$ とは？ $n\geqq N$ のこととすると，「ある N が存在して」の N は無限大にとばせません．級数の収束は「数列の収束」と同じだから，もともと ε-N 論法は使えるのですが，変な形式でそれらしきことを書いてもうまくいきません．考えていることを $\exists$ などを使わずに言葉で書いて，意味があるかどうか確かめなさい．

質問 5： 級数の定義は $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ というように数列の和であるにも関わらず，黒板にかかれていた「数とは限らない」とはどういう意味でしょうか．「収束するとは限らない」ということですか． **お答え：**「数列の和」と簡単にいいますが，無限個の数をどうやって足すのでしょう．簡単に $\sum_{n=0}^{\infty}$ と書く，その定義をここでは問題にしているのです．級数が収束しないときにはただの形式的な式なので，数と思ってはいけません．

質問 6： 高校までに習った級数の求め方（山田注：和の求め方）に「区分求積法」というものがあったが，このギロンについては大学では行わないのですか？ というか，そもそも区分求積が積分を定義する際のリーマン和の極限の 1 つの例にすぎないということですか？ **お答え：**「大学では行わない」のではなく，この講義では扱わない．

質問 7： 演習の問題に出てきた「A ならば B」の否定命題が「A かつ B でないことがある」らしいのですが，うまくイメージがわきません．わかりやすく理解する方法はあるのでしょうか． **お答え：**「A ならば B」は「(A でない) または B」のこと（「ならば」の定義）．あとはド・モルガンの法則．イメージにこだわらず定義まで戻りなさい．

質問 8： コーシー列が具体的にどういうものなのかイメージがつかないです． **お答え：** イメージらしきものは講義で説明しましたが，それ以前に定義は言えますね．それでよいです．イメージにこだわりすぎる先に進めません．

質問 9： 一般項が 0 へ収束するが無限級数が発散する数列について，数学的に証明されても直感に反してとらえずらいです．存在しうる一般項が 0 に収束する数列のうち，級数が発散するものと収束するものではどちらが多いでしょうか． **お答え：** それはあなたの直感が誤っているのです．直感の方を直していきましょう．ご質問ですが，数列は無限種類ありますが，多い，少ないはどうやって比較しましょうか．

質問 10： 二分法の考え方で中間値の定理を示す際の手順を言葉で表すと，「区間を半分にわけ，そのうち解のある区間に対して同じことを繰り返す」ことになると思うが，区間を二分したときにどちらかの区間（もしくは中点）に必ず解をもつということは自明でないのでは，と思った．（暗に中間値の定理を認めているように感じた）．この考えが正しいかどうかを教えてほしい． **お答え：** 半分の区間に「解がある」ということは使っていません．「どちらかの区間では両端で関数の値が符号をかえる」ということをつかいます．その区間に「解がありそうだ」と思って，さらにその区間を二分していく，そのうちに 1 点がつかまる，という方法です．

質問 11： $1+2+3+4+\dots$ は発散すると思うのですが，染川先生が $1+2+3+4+\dots=-\frac{1}{12}$ になると言ってました．本当でしょうか？

質問 12： ゼータ関数で $\zeta(-1)=1+2+\dots=-\frac{1}{12}$ （$\zeta(s)$ の s は複素数としていて，この 1 は複素数としてみてる）が有名ですが，私はこれを間違いだと覚えていました．なぜなら複素数 s の実部が 1 より大きいときのみ $\zeta(s)$ は収束するはずだからです．これは正しいですか．

お答え： この話題はあまりいい加減に扱うのはどうかと思うので，少し説明します：ご質問の等式は正しくないのですが，次のように解釈されます．複素数 $s=u+\mathrm{i}v$ （$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, u, v は実数）に対して，無限級数

$$(*)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\dots\qquad\begin{pmatrix}n^s:=e^{s\log n}=e^{(u+\mathrm{i}v)\log n}=e^{u\log n}e^{\mathrm{i}v\log n}\\ \quad=n^u(\cos(v\log n)+\mathrm{i}\sin(v\log n))\end{pmatrix}$$

を考えます．ただし，複素数の数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは，実数列 $\{|a_n-\alpha|\}$ が 0 に収束することとします．すると，級数 $(*)$ は，複素平面上の領域 $D:=\{s\in\boldsymbol{C}\,;\,\mathrm{Re}\,s>1\}=\{u+\mathrm{i}v\,;\,u>1\}$ 上で収束することがわかるので，その値を $\zeta(s)$ とおくと $\zeta(s)$ は D で定義された「解析関数」（定義は複素関数論の教科書参照）となることがわかります．ところが，複素平面から 1 を除いた $\tilde{D}=\{s\in\boldsymbol{C}\,;\,s\neq 1\}$ 上の解析関数 $\tilde{\zeta}$ で，D 上では ζ と一致するものがただ一つ存在します．これを $\zeta(s)$ の <u>解析接続</u> といって，それも $\zeta(s)$ と書いてしまいます．解析接続されたゼータ関数に対して $\zeta(-1)=-\frac{1}{12}$ が成り立つ，というのがご質問の「等式」の解釈です．

質問 13： ε-δ 論法の δ を十分に小さく取ったとき，どこまで許されますか？ **お答え：** なにを許すのでしょう．

質問 14： 補題 5.15 をみると，例 5.10 などが収束するのは例外なものなのでしょうか．

お答え： なぜ補題 5.15 から例 5.10 が例外的に見えるのでしょうか．

質問 15： 中間試験の持ち込み用紙に書かれていた内容によって期末試験の出題内容が変わることがありますか？

お答え： ノーコメント．中間試験の答案は参考にします．とくに，多数が間違えた基本的な問題は重点的に出題し，最低点を負にするなど配点の工夫をする可能性があります．2 月 2 日に中間試験の答案を返却する際にお伝えします．