微分積分学第二 (4)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2017/calc-2/

2017.12.15

講義資料

今回の配布物は

講義資料 4 （2 枚）　講義ノート III （3 枚，来週の講義内容）

です．

講義資料 4 修正：

-

微分積分学第二 (4)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2017/calc-2/

2017.12.15

ご意見

ご意見： $\frac{49}{98} = \frac{4}{8}$ なんてどうでしょうか．

コメント： いいね．

ご意見： スクリーンを使っていないときは教室の電気をつけてほしい．

コメント： 気をつけます．

ご意見： 筆記体のアルファベットが何て書いてあるのか読み取りづらかったです．

コメント： ごめんなさい．なんとか読めるようにしておいたほうがいいんですけどね．

ご意見： 誤字に厳しすぎてついていけません．

コメント： なんで? 正しい字を覚えるのがそんなに嫌?

ご意見

ご意見： かなり余白のあるスライドでも字が小さかったりするので，気力が失せてしまいます．プリントがあるとはいえ，そして字の大きさをかえるのが面倒とはいえ，直していただけると嬉しいです．この部分を発表している時間が退屈です．

コメント： 前半：善処します．たとえば講義資料の「番号」を引用する形にします．後半：なぜ退屈？重要な情報をいっぱい垂れ流しているつもりですが．

ご意見： 金曜日を全て意見や質問に答える時間にするよりは，半分くらいを新しい範囲を進める時間にしてほしいと思いました．

コメント： 実は半分くらい新しいことを（質問に答える形で）やっているんですがね．月曜日に説明した部分の「穴」を埋めているはずで，それが「新しいところ」です．

ご意見： 少し証明に重きを置いて頂けるとありがたいです．

コメント： たとえばどの定理の証明が必要でしょうか．(テイラーの定理の証明のしかたは前回紹介しましたね)．

ご意見

ご意見： 質問に対する解答が少し冷たい気がしたので，もう少しトゲのない答え方でお願いします．

コメント： 具体的にはどういうものでしょう．質問に答えている（質問になっていない言明には「答えられない」といっている）だけだと思うのですが．

ご意見： 染レポ 18:00 締切の前に染レポの問題にあった $\operatorname{Tan}^{-1} x$ のやつをやってましたね．途中を省いているので，答えしか流出しなかったけれど...

コメント： なるほど．$\operatorname{Tan}^{-1} x$ のテイラー展開はどんな本にも書いてあるし，たいていの人は覚えているので，答えを知ったとしてもあまり価値のある情報じゃないですね．
$1/(1+x^2)$ の積分だけでは正解じゃないし．

質問から

Q21: 「$:=$」と「$=$」の違いを教えて下さい．

A: ごめんなさい．講義ノートに説明を付け忘れていました．
「$A := B$」は「A を B で定義する」の意味で使っています
（それほど一般的な記号ではありません）．

Q35: テーラー展開のやり方がイマイチ上手くできないです．

A: そうですか（としか答えようがない）．
すこしまじレスすると：「イマイチ」は「今ひとつ」という意味と思います．これは「どれくらいのところを目標にしており，そこにある程度近づいているが，まだ到達していない」ととるべきだと思います．どの程度の近づき具合かによって回答が違いますので，お答えできないわけです．

Q26: OCW のシラバスと異なり，極限の問題が後回しになっているのはなぜですか．

A: そこまで気を使わなくてもできることは先に片付けたい．

質問から

Q1: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ にロピタルの定理を用いることが循環論法であるという内容に関して．そもそも $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ の導出にも扇形の面積や弧度法を用いており，面積や長さは積分で定義されるため循環論法である，ということを聞いたことがあるが，先生はどのように考えているのか教えてほしい．

Q2: 別の講義で $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を示すのに，e^x，$\sin x$, $\cos x$ のマクローリン展開を用いて示されていましたが，今のところマクローリン展開は実数の関数で成立とだけわかっています．最初の公式自体が実数の関数と複素数の関数を結びつけるものだという認識だったので違和感を感じ始めました．授業内容と少しそれますが，この公式の証明はマクローリン展開による証明でいいのでしょうか?

質問から

Q22: **授業とあまり関係がなくなってしまうのだが，ラージ・オーについても詳しく説明してほしい．(授業でスモール・オーが出てきたので)．**

A: a **を含む開区間を含む区間** I **から** a **を除いた点で定義された関数** f, g **に対して** $|f(x)/g(x)|$ **が** a **の近くで有界，すなわち，正の数** ε **と** M **で，** $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ **かつ** $x \neq a$ **をみたす任意の** x **に対して** $|f(x)/g(x)| \leqq M$ **が成り立つときに** $f(x) = O(g(x))$ $(x \to a)$ **と表す．**

質問から

Q7: $\frac{1}{1+x}$ の収束半径の話で「$-1 < x < 1 \Rightarrow \left|\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}\right|$ が $n \to \infty$ で収束する」とありました．ですが，$x = 1$ でも $|R_{n+1}|$ は収束します（$\because \left|\frac{1}{(1+\theta)^{n+2}}\right|$ は $(1+\theta) > 1$ より）．（以下略：R_{n+1} が 0 に収束する範囲とテイラー級数が収束する範囲の違いについて）

Q8: $|R_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \to 0$ （中略）の件，if $0 \leqq x < 1$ というのは理解できたのですが，なぜ if $-1 < x < 0$ でもあるのかがわかりませんでした．

A: ここで説明します．積分剰余項を用います．

Q15: 演習でコーシーの剰余項とラグランジュの剰余項があると教わりましたが，この 2 つの違いは何ですか? また，なぜ 2 つ存在しているのですか?

A: 2 つに限りません．

質問から

Q11: $n \geqq 0$ で定義された数列 $\{a_n\}$ があり，一般項が一通りの n の式であらわされているとして，そのような数列 $\{a_n\}$ を使った $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ の無限級数と等しくなる関数 $f(x)$ は $\{a_n\}$ が何であれ存在するのでしょうか．例えば $a_n = \frac{1}{n!}$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ は e^x と等しくなるというような感じで，ある $\{a_n\}$ に対応する関数は常に存在するのかということです．

Q12: 任意の n に対して x^n より速いオーダーで 0 に近付く関数は存在しますか? 暫く考えましたがわかりませんでした．

Q13: 任意の n で $f^{(n)}(0) = 0$ かつ C^∞ 級の関数が，$\exists x\ f(x) \neq 0$ であるようすは想像もつきません．どのようなグラフになる関数なのでしょうか?

Q18: 解析関数のところで，$P_k(t)$ は t の多項式で，なぜ帰納的に $P_{k+1}(t) = t^2 P_k(t) - P_k'(t)$ となるのか分からない．