# 微分積分学第二 中間試験 〔問題 1〕

**注意事項**

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読み, 理解できるように書いてください.
- 裏面・~~計算用紙~~は下書き, 計算などに使用できますが, 採点の対象とはしません.
- 答案は 2 月 2 日の講義の際に返却します. それ以降は**数学事務室 (本館 3 階 332B)**.
- 答案返却の際に, 定期試験の予告および持ち込み用紙を配布します.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は, 2018 年 2 月 4 日までに山田まで電子メイルでご連絡ください. なお, 管理の都合上, 上記期日以降のクレイムは, たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません.

**指定用紙のみ持込可**

**定理 A:** 関数 $f$ が $a$ と $a+h$ を含む区間で $C^\infty$-級ならば, 任意の正の整数 $n$ に対して,

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k+R_{n+1}(h),\qquad R_{n+1}(h)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1},\qquad 0<\theta<1$$

を満たす $\theta$ が存在する. とくに $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}=0$ である.

**定義 B:** 数列 $\{a_n\}$ が $\alpha$ に収束するとは, 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対して, 次をみたす番号 $N$ が存在することである:「$n\geqq N$ をみたすすべての番号 $n$ に対して $|a_n-\alpha|<\varepsilon$」.

**定義 C:** 数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であるとは, 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対して, 次をみたす番号 $N$ が存在することである:「$m,n\geqq N$ をみたすすべての番号 $m$, $n$ に対して $|a_m-a_n|<\varepsilon$」.

**定義 D:** 関数 $f$ が $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ をみたすとは, 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対して, 次をみたす正の数 $\delta$ が存在することである:「$0<|x-a|<\delta$ をみたす任意の $x$ に対して $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$」.

**定理 E:** (実数の連続性公理の言い換え) 上に有界な単調非減少数列は収束する.

**定理 F:** (実数の連続性公理の言い換え) コーシー列は収束する.

**定義 G:** $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$.

## 問題 A 文中の $\boxed{1}$ ∼ $\boxed{30}$ に最も良く充てはまる数・式・記号を入れ, 下線 **a** を示しなさい. [40 点]

関数 $f(x)=\cosh x$ は $x\geqq 0$ で単調増加なので, $f(1)<f(\log 3)=\boxed{1}$ が成り立つ[1]. この関数 $f$ に対して, $a=0$, $h=x$, $n=5$ として定理 **A** (冒頭枠内) を適用すると,

$$\cosh x=\boxed{2}+\boxed{3}x+\boxed{4}x^2+\boxed{5}x^3+\boxed{6}x^4+\boxed{7}x^5+R_6(x),$$
$$R_6(x)=\boxed{8}\quad(0<\theta<1)$$

と書ける. とくに $x=0.6$ とすると $\cosh 0.6=\boxed{9}+R_6(0.6)$, $\underset{\mathbf{a}}{\underline{\boxed{10}<R_6(0.6)<\boxed{11}}}$ が成り立つ[2]. したがって, $\cosh 0.6=\boxed{12}.\boxed{13}\,\boxed{14}\,\boxed{15}\,\boxed{16}\,\boxed{17}\,\boxed{18}\,\boxed{19}\,\boxed{20}\,\boxed{21}\dots$[3] である. 一方,

$$\tan x=\boxed{22}+\boxed{23}x+\boxed{24}x^2+\boxed{25}x^3+\boxed{26}x^4+R_5'(x),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{R_5'(x)}{x^{\boxed{27}}}=0$$

となるので[4], 極限値

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x+a\cos x+b}{x(\tan x-x)}$$

が存在するための条件は $a=\boxed{28}$, $b=\boxed{29}$ で, そのときの極限値は $\boxed{30}$ となる.

[1] log は自然対数を表す

[2] $\boxed{9}$, $\boxed{10}$, $\boxed{11}$ には小数が入る. 10 の指数を用いた表示でもよい.

[3] $\boxed{12}$–$\boxed{21}$ には, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 または × を入れる. 上の推論から桁の数字が確定する場合はその数字を, そうでない場合は × を入れよ.

[4] $\boxed{27}$ には, 条件をみたす最大の整数が入る.

**問題 B** 文中の $\boxed{1}$〜$\boxed{8}$ に最もよく充てはまる数・式・×を入れなさい． [20 点]

2 変数関数 $f(x,y)=x^4+y^4+2x^2y^2-2xy$ の偏導関数は $\boxed{1}$ であるから，これらがすべて 0 になるのは，$x$ 座標が小さい順に $(x,y)=\boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}$ である[5]．また $f$ の 2 次偏導関数は $\boxed{6}$ であるから，$f$ が極大値をとる点をすべて挙げると $(x,y)=\boxed{7}$, $f$ が極小値をとる点をすべて挙げると $(x,y)=\boxed{8}$ である[6]．

**問題 C** 文中の $\boxed{1}$〜$\boxed{6}$ に最もよく充てはまる数・式・言葉を入れなさい． [20 点]

次の定理を証明しよう：

> 点 $a$ を含む開区間で定義された $C^\infty$-級関数 $f$ が $f'(a)=f''(a)=f'''(a)=0, f^{(4)}(a)<0$ をみたすならば $f$ は $a$ で極 $\boxed{1}$ 値をとる[7]．

**証明：** $f^{(4)}(a)=-m\ (m>0)$ とおいて，テイラーの定理（冒頭の定理 A）を適用すると

$$(*)\qquad f(a+h)-f(a)=\boxed{2}+R_5(h), \qquad \lim_{h\to 0}\frac{R_5(h)}{h^{\boxed{3}}}=0$$

が成り立つ[8]．とくに $(*)$ の第二の式から

$$0<|h|<\delta \quad \text{をみたす任意の } h \text{ に対して} \qquad \left|\frac{R_5(h)}{h^{\boxed{3}}}\right|<\boxed{4}$$

となるような正の数 $\delta$ が存在する．このとき，$-\delta<h<\delta\ (h\neq 0)$ をみたす $h$ に対して

$$f(a+h)-f(a)=\boxed{5}\,\boxed{6}\,0$$

が成り立つ[9]．したがって $f$ は $a$ で極 $\boxed{1}$ 値をとる．

**問題 D** [20 点] 数列 $\{a_n\}$ から定まる級数

$$(\star)\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad\qquad (\star\star)\quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

に対して，次は正しいか．正しければ○，そうでなければ×を解答欄の [　　] 内に記し，理由を述べなさい．

(1) 級数 $(\star)$ が収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ である．

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ならば $(\star)$ は収束する．

(3) 級数 $(\star\star)$ が収束するならば，級数 $(\star)$ は収束する．

(4) 級数 $(\star)$ が収束するならば，級数 $(\star\star)$ は収束する．

**問題 E** [0 点] この授業に関するご意見，ご希望，ご誹謗，ご中傷などありましたらお書きください．回答の内容が成績に影響することは一切ありません．

おつかれさまでした ♡

---

[5] 条件をみたす $(x,y)$ の組は 4 組以下である．答えが 4 組未満の場合は，余った解答欄に×印を入れよ．

[6] $\boxed{7}$–$\boxed{8}$: 該当する点がない場合は，解答欄に×を入れよ．

[7] $\boxed{1}$ には「大」または「小」が入る．

[8] $\boxed{3}$ には条件をみたす最大の整数が入る．

[9] $\boxed{6}$ には等号または不等号，$\boxed{5}$ にはこの結論を導く式変形全体が入る．

# 微分積分学第二 中間試験 〔解答用紙 1〕

## 問題 A の解答欄 配点：1/2-8/9/10–11+a/12–21/22–27/28–29/30: 各 5 点

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{5}{3}$ | $1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{24}$ | $0$ | $\frac{x^6}{720}\cosh\theta x$ |

| 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|
| $1.1854$ | $6\times 10^{-5}$ | $11\times 10^{-5}$ |

**下線 a の理由：**

$$
\begin{aligned}
R_6(0.6) &= \frac{(0.6)^6}{720}\cosh(0.6\theta) \geqq \frac{(0.6)^6}{720}\cosh 0 = \frac{3^6}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5^6} \\
&= \frac{3^4}{2^4\cdot 5^7} = \frac{3^4\cdot 2^3}{10^7} = 81\times 8\times 10^{-7} = 648\times 10^{-7} \geqq 6\times 10^{-5} \\
R_6(0.6) &\leqq \frac{(0.6)^6}{720}\cosh 0.6 \leqq \frac{(0.6)^6}{720}\cosh 1 \leqq \frac{(0.6)^6}{720}\frac{5}{3} \\
&= \frac{3^6\cdot 5}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5^6\cdot 3} = \frac{3^3}{2^4\cdot 5^6} = \frac{3^3\cdot 2^2}{10^6} = 108\times 10^{-6} \leqq 11\times 10^{-5}
\end{aligned}
$$

| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 8 | 5 | × | × | × | × | × | × |

| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $1$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ | $0$ | $4$ |

| 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|
| $1$ | $-2$ | $\frac{1}{4}$ |

•

| 学籍番号 | | | - | | | | | | 氏名 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

# 微分積分学第二 中間試験 〔解答用紙 2〕

## 問題 B の解答欄 配点：1/2–5/6/7–8: 各 5 点

1
$$f_x = 4x^3 + 4xy^2 - 2y, \quad f_y = 4x^2y + 4y^3 - 2x$$

| 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ | $(0,0)$ | $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ | × |

6
$$f_{xx} = 12x^2 + 4y^2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 8xy - 2, \quad f_{yy} = 4x^2 + 12y^2$$

| 7 | 8 |
|---|---|
| × | $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ |

## 問題 C の解答欄 配点：1/2–3/4/5–6 各 5 点

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 大 | $-\frac{m}{24}h^4$ | 4 | $\frac{m}{48}$ |

5
$$= -\frac{m}{24}h^4 + R_5(h) \leqq -\frac{m}{24}h^4 + \frac{m}{48}h^4 = -\frac{m}{48}h^4$$

6 $<$

| 学籍番号 | | | - | | | | | | 氏名 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

## 微分積分学第二 中間試験 〔解答用紙 3〕

### 問題 D の解答欄 配点：各 5 点

(1) [ ○ ]

級数 (⋆) の和を $s$ と書くと，$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n = 1, 2, \dots)$ で定まる数列 $\{s_n\}$ は $s$ に収束する．この数列の番号を一つずらした数列 $\{s_{n-1}\}$ も $s$ に収束するから，

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0 \qquad (n \to \infty)$$

となる．

(2) [ × ]

$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ $(n = 1, 2, \dots)$ とすると，$\lim_{n\to\infty} = 0$ である．一方，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1 \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

なので，この $\{a_n\}$ に対して級数 (⋆) は発散する．

(3) [ ○ ]

$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\tilde{s}_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ $(n = 1, 2, \dots)$ とおく．級数 (⋆⋆) が収束することから，数列 $\{\tilde{s}_n\}$ は収束．したがって，この数列はコーシー列である．すなわち，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，次を満たす番号 $N$ が存在する：$m > n \geqq N$ を満たす任意の番号 $m$, $n$ に対して

$$(\heartsuit) \qquad |\tilde{s}_m - \tilde{s}_n| = \big||a_m| + |a_{m-1}| + \dots + |a_{n+1}|\big| < \varepsilon.$$

このとき，$|s_m - s_n| = |a_m + a_{m-1} + \dots + a_{n+1}| \leqq |a_m| + |a_{m-1}| + \dots + |a_{n+1}| < \varepsilon$ ——++ となるので $\{s_n\}$ もコーシー列となり，定理 **F** より収束する．したがって (⋆) も収束する．

(4) [ × ]

$a_n = (-1)^{n+1}/n$ $(n = 1, 2, \dots)$ とおくと，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \log 2$$

となり，級数 (⋆) は収束する．一方，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

は発散する．

| 学籍番号 | | | - | | | | | | 氏名 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

2018 年 1 月 29 日 10 時 45 分 ~12 時 15 分
山田光太郎 (2018 年 1 月 29 日訂正; Ver. 3)
kotaro@math.titech.ac.jp


## 微分積分学第二 中間試験 〔解答用紙 4〕

**この用紙には，問題 E への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．**

**問題 E** この授業に関するご意見，ご希望，ご誹謗，ご中傷などありましたらお書きください．回答の内容が成績に影響することは一切ありません．

**回答欄**

## 受験上の注意

**座席表：** この用紙の裏面に座席表があります．

- 2017 年度入学の方は，学籍番号のうち “17B” を除いた番号の席に着席してください．
- それ以外の方は，ご自分の名前のある席に着席してください．
- **座席表に学籍番号・氏名がない方は監督者まで申し出てください**．

**試験開始：** 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 受験者が，筆記用具・持込用紙・必需品（時計不可）以外の物を鞄に入れ，机の下か足下に置いていること．
- 私語がないこと．

**問題用紙・解答用紙：** 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
- 解答用紙 4 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．5 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．
- 原則として**途中退室は認めません**．

**試験終了・回収：** 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を各列の黒板に向かって**右端**から左，**左端**まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最前列の席の方は，答案用紙の束を机の上におき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

| 学籍番号 | | | - | | | | | | 氏名 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|