2016年度　通信理論

第7回　通信路符号化
（通信路符号化, 通信路符号化定理, 繰返し符号）

2016. 4.28

植之原　裕行 uenohara.h.aa@m.titech.ac.jp

講義スケジュール（前半）

	日付	教科書	内容
第1回	**4/ 7**	第1章・第2章	通信システム概論： 通信伝送のモデルと具体例
第2回	**4/11**	第3章	情報源符号化 （情報量, エントロピー, 情報源符号化定理）
第3回	**4/14**	第4章2節	データ圧縮 （情報源符号化, 語頭符号, ハフマン符号）
第4回	**4/18**	第4章3節～4節	データ圧縮（イライアス符号）
第5回	**4/21**	第4章5節～6節	データ圧縮（ZL符号, ランレングス符号）
第6回	**4/25**	第5章	通信路容量 （通信路の確率モデル, 相互情報量, 通信路容量）
第7回	**4/28**	第6章1節～2節	**通信路符号化** **（通信路符号化, 通信路符号化定理, 繰返し符号）**
第8回	**5/ 2**	第1章～ 第6章2節	通信理論に関する演習

講義スケジュール（後半）

	日付	教科書	内容
第９回	5/ 9	第６章３、４節	誤り訂正符号（線形ブロック符号）
第１０回	5/12	第６章５節	誤り訂正符号（巡回符号, 畳み込み符号）
第１１回	5/16	第６章６節	誤り訂正符号（LDPC符号）
第１２回	5/19	第7章	連続情報と連続通信路
第１３回	5/23	第８章１節～２節	暗号の基礎理論
第１４回	5/26	第８章３節～７節	暗号の例（共通鍵暗号、ハッシュ関数）
第１５回	5/30	第８章３節～７節	暗号の例（公開鍵暗号）
	6/ 2		期末試験（予定）

通信路符号化

- 離散無記憶情報源　$\zeta = \{s_0, s_1, \ldots, s_{M-1}\}$

マッピング

- 符号化（線形ブロック符号の場合）　$\{x^n{}_0, x^n{}_1, \ldots, x^n{}_{M-1}\}$

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{b_0, b_1, \cdots, b_{n-k-1}}}^{n-k\ \text{(パリティ)}}\overbrace{\boxed{m_0, m_1, \cdots, m_{k-1}}}^{k\ \text{(データ)}}}_{n}$$

線形符号:任意の2つの符号語を用いて他の符号語が生成可能

- (n, k) ブロック符号とは

データ:　事象s_i（$i = 0, 1, \cdots, M-1$）の符号ビット数k

パリティ:　冗長ビット数n - k

あらかじめ定められた
符号化規則に従って計算

- 符号化率　$r = \dfrac{k}{n} < 1$

通信路符号化定理

- **通信路符号化定理**＝シャノンの第2定理

$\dfrac{H(\zeta)}{T_s}$ ：平均情報レート [bit/s]

シンボル時間T_sごとに情報を発信

$H(\zeta)$: 情報源のエントロピー

$\dfrac{C}{T_c}$ ：単位時間あたり通信容量 [bit/s]

シンボル送出間隔T_cの間通信路容量Cの通信路を利用可能

C : 通信路容量

通信路符号化定理

- $\dfrac{H(\zeta)}{T_s} < \dfrac{C}{T_c}$　ならば

誤りを任意に小さくし、符号化率を小さくしすぎない符号が存在する。

ただしどのような符号かは提示していない。

- $\dfrac{H(\zeta)}{T_s} > \dfrac{C}{T_c}$　ならば

誤りを任意に小さくできる符号は存在しない。

二元対称通信路への応用

- 通信路容量

$$C = 1 - H(p)$$

- バイナリ符号化

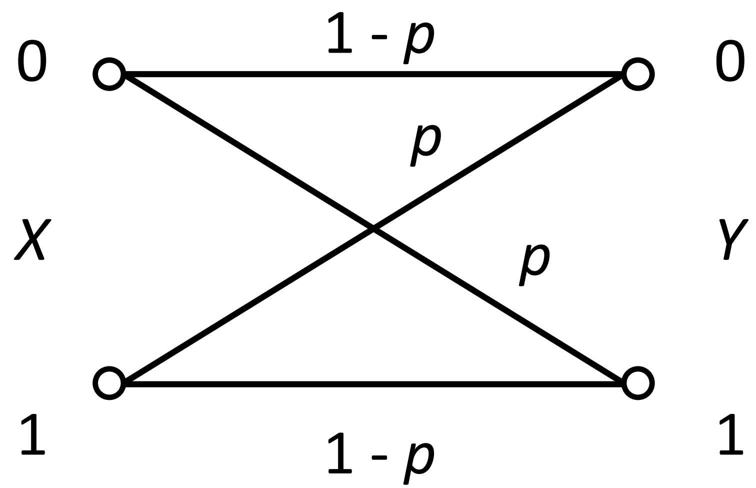
$$\max H(\zeta) = k \text{ [bit]}$$

- 通信路符号化定理

$$\frac{H(\zeta)}{T_s} = \frac{H(\zeta)}{nT_c} = \frac{k}{nT_c} = \frac{r}{T_c} < \frac{C}{T_c}$$

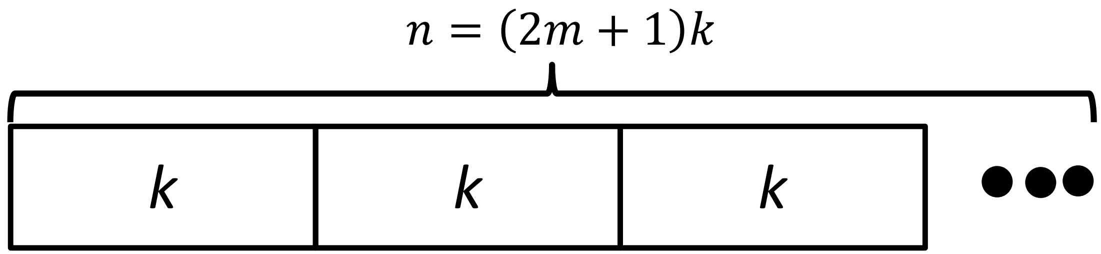
$\therefore r < C$　ならば誤り率を任意に小さくすることが可能

『符号化率（または情報伝達速度）<通信路容量』



繰り返し符号

- メッセージの各符号が数回繰り返される符号



- 復号 : 多数決復号を用いることを考える

  受信ビットの0, 1の判定数の多いほうを正しいと判定

  ・1つの情報を誤って受信する確率　$P_s = 1 - (1-p)^k$

  ・符号語を誤って受信する確率（半分以上間違え）

$$P_e = \sum_{i=m+1}^{n} \binom{n}{i} {P_s}^i (1-P_s)^{n-i}$$

通信路符号化定理による考察

$k = 1, p = 10^{-2}$ の場合を考える。

- 通信路容量

$$C = 1 - H(p) = 1 + p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p) = 0.9192$$

- 通信路符号化定理

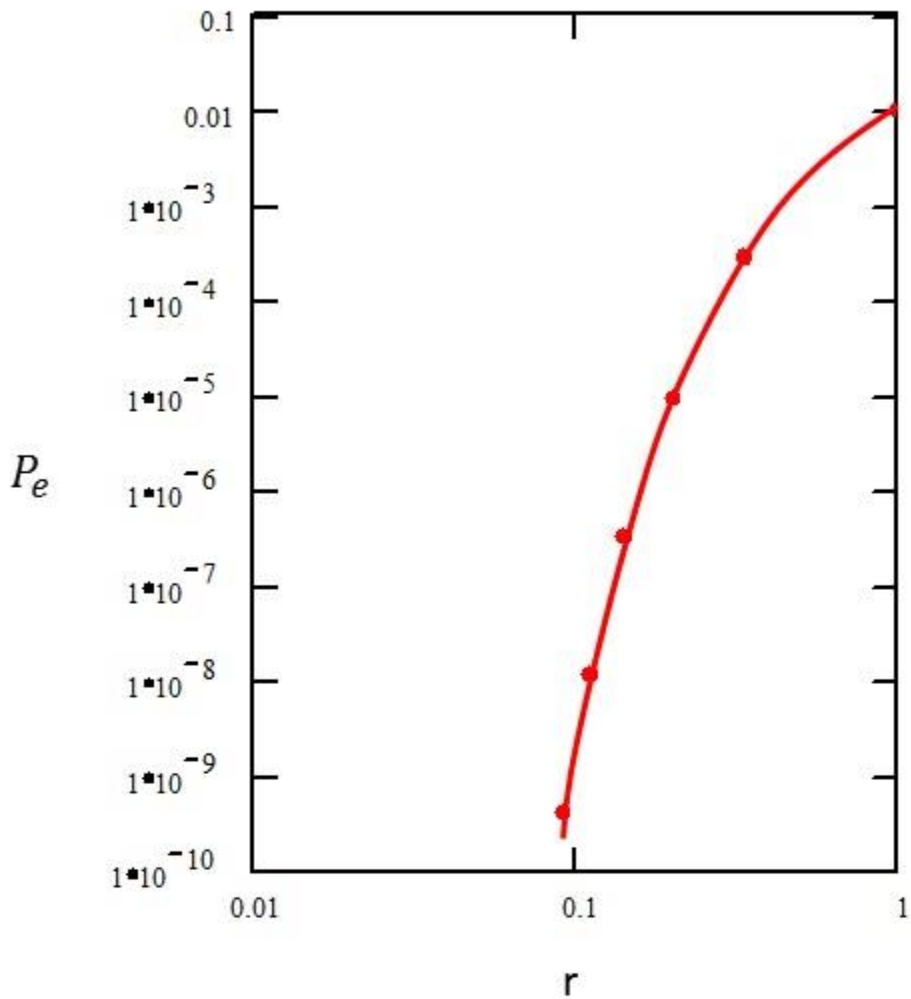
➡ $r < C$

ならば誤り率を任意に
小さくすることが可能なので

$$r < 0.9192$$

r	P_e
1	10^{-2}
$\frac{1}{3}$	3.0×10^{-4}
$\frac{1}{5}$	9.9×10^{-6}
$\frac{1}{7}$	3.4×10^{-7}
$\frac{1}{9}$	1.2×10^{-8}
$\frac{1}{11}$	4.4×10^{-10}

通信路符号化定理による考察



まとめ

- 通信路符号化により通信路の信頼性を改善する。

- 通信路符号化定理を満たせば任意に誤り率を低減可能。

$$\frac{H(\zeta)}{T_s} < \frac{C}{T_c}$$

- 二元対称通信路の通信路符号化定理

$$\frac{H(\zeta)}{T_s} = \frac{H(\zeta)}{nT_c} = \frac{k}{nT_c} = \frac{r}{T_c} < \frac{C}{T_c}$$

$$\therefore r < C$$