2016年度　通信理論

第6回　通信路容量
（通信路の確率モデル, 相互情報量, 通信路容量）

2016. 4.25

植之原　裕行 uenohara.h.aa@m.titech.ac.jp

講義スケジュール（前半）

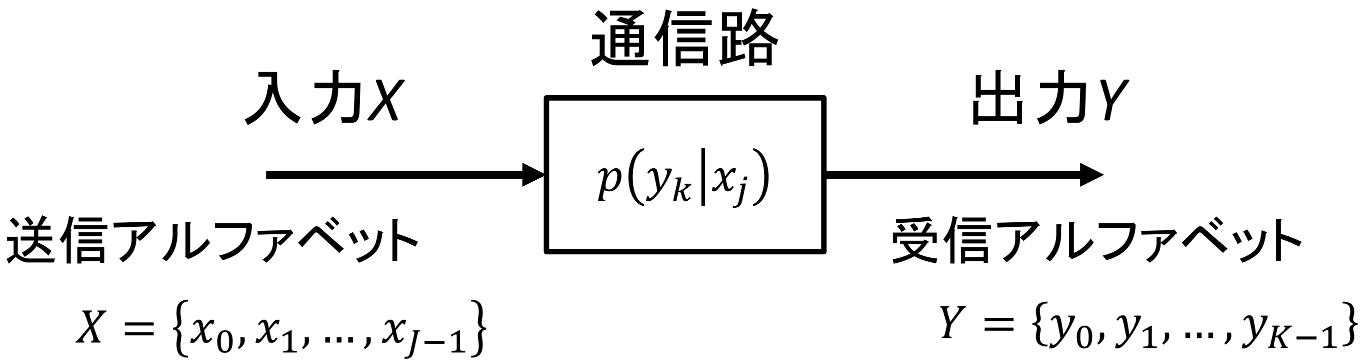
	日付	教科書	内容
第1回	**4/ 7**	第1章・第2章	通信システム概論： 通信伝送のモデルと具体例
第2回	**4/11**	第3章	情報源符号化 （情報量, エントロピー, 情報源符号化定理）
第3回	**4/14**	第4章2節	データ圧縮 （情報源符号化, 語頭符号, ハフマン符号）
第4回	**4/18**	第4章3節～4節	データ圧縮（イライアス符号）
第5回	**4/21**	第4章5節～6節	データ圧縮（ZL符号, ランレングス符号）
第6回	**4/25**	第5章	**通信路容量** **（通信路の確率モデル, 相互情報量, 通信路容量）**
第7回	**4/28**	第6章1節～2節	通信路符号化 （通信路符号化, 通信路符号化定理, 繰返し符号）
第8回	**5/ 2**	第1章～ 第6章2節	通信理論に関する演習

講義スケジュール（後半）

	日付	教科書	内容
第９回	5/ 9	第６章３、４節	誤り訂正符号（線形ブロック符号）
第１０回	5/12	第６章５節	誤り訂正符号（巡回符号，畳み込み符号）
第１１回	5/16	第６章６節	誤り訂正符号（LDPC符号）
第１２回	5/19	第7章	連続情報と連続通信路
第１３回	5/23	第８章１節～２節	暗号の基礎理論
第１４回	5/26	第８章３節～７節	暗号の例（共通鍵暗号、ハッシュ関数）
第１５回	5/30	第８章３節～７節	暗号の例（公開鍵暗号）
	6/ 2		期末試験（予定）

通信路

- 離散無記憶通信路（Discrete Memoryless Channel）



- 入力Xに通信路において雑音が加わり出力Yとなる。
- 出力は現在の入力のみに依存（無記憶通信路）

遷移確率、遷移行列

- 遷移確率（Transition Probability）

$$p(y_k|x_j) = P(Y = y_k|X = x_j)$$

← x_jを送った条件の下でy_kを受け取る条件付確率

$0 \leq p(y_k|x_j) \leq 1$　（すべての*j*, *k*に対して）

- 遷移行列

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p(y_0|x_0) & p(y_1|x_0) & \cdots & p(y_{K-1}|x_0) \\ p(y_0|x_1) & p(y_1|x_1) & \cdots & p(y_{K-1}|x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(y_0|x_{J-1}) & p(y_1|x_{J-1}) & \cdots & p(y_{K-1}|x_{J-1}) \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{p_X} = [p(x_0), p(x_1), \cdots, p(x_{J-1})]$, $\boldsymbol{p_Y} = [p(y_0), p(y_1), \cdots, p(y_{K-1})]$とすると、

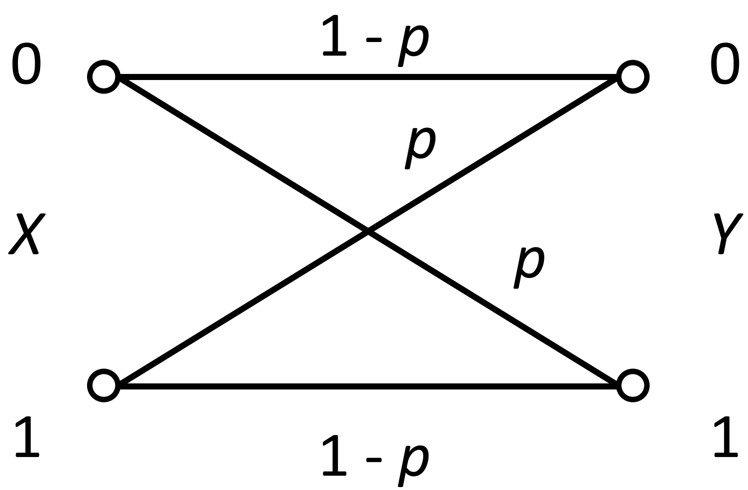
$\boldsymbol{p_Y} = \boldsymbol{p_X}\boldsymbol{P}$で表すことができる。

$$\sum_{k=0}^{K-1} p(y_k|x_j) = 1$$　（すべての*j*に対して）

いくつかの通信路の例

- ２元対称通信路

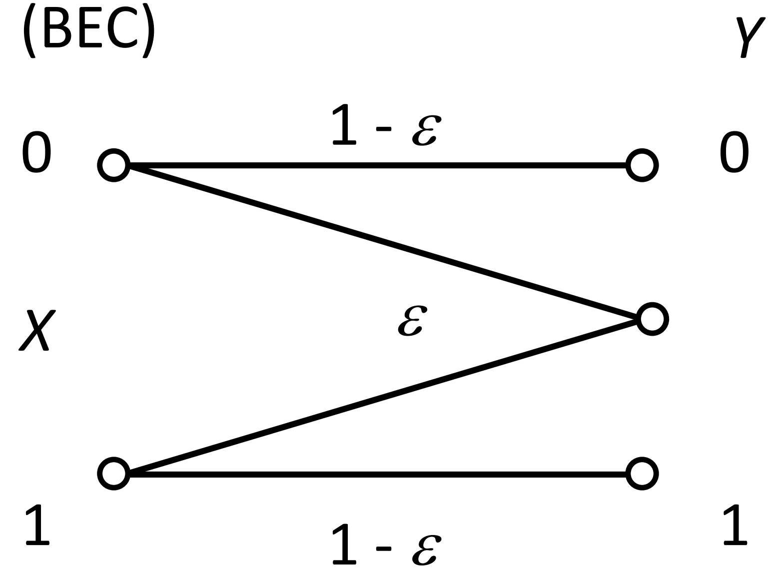
Binary Symmetric Channel (BSC)



$$\begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

- ２元消失通信路

Binary Erasure Channel (BEC)



$$\begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix}$$

結合確率、周辺確率

- 結合確率：条件付確率、事前確率

$$p(x_j, y_k) = P(X = x_j, Y = y_k) = P(Y = y_k | X = x_j) P(X = x_j)$$

$$= p(y_k | x_j) p(x_j) = p(x_j | y_k) p(y_k)$$

結合確率

条件付確率　事前確率

- 周辺確率

$$p(y_k) = P(Y = y_k) = \sum_{j=0}^{J-1} P(Y = y_k | X = x_j) P(X = x_j)$$

$$= \sum_{j=0}^{J-1} p(y_k | x_j) p(x_j)$$

結合・条件付エントロピー

- 結合エントロピー

$$H(X,Y)=\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1}p(x_j,y_k)\log_2\frac{1}{p(x_j,y_k)}$$

- 条件付エントロピー

$$H(X|Y)=\sum_{k=0}^{K-1}H(X|Y=y_k)p(y_k)=\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{j=0}^{J-1}p(x_j|y_k)\,p(y_k)\log_2\frac{1}{p(x_j|y_k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{j=0}^{J-1}p(x_j,y_k)\log_2\frac{1}{p(x_j|y_k)}$$

相互情報量

- 相互情報量(伝達情報量)

通信路に送信シンボルx_jを送信し、受信シンボルy_kが受信されたとする。

この通信によって伝えられた情報量:相互情報量
(送信信号の情報量ー送信により失われた(変化した)情報量)

条件付確率が対応

$$I(x_j;y_k)=\log_2\frac{1}{p(x_j)}-\log_2\frac{1}{p(x_j|y_k)}=\log_2\frac{p(x_j|y_k)}{p(x_j)}$$

平均伝達情報量とエントロピー

送信アルファベット$X=\{x_0,x_1,\cdots,x_{J-1}\}$

受信アルファベット$Y=\{y_0,y_1,\cdots,y_{K-1}\}$

遷移確率 $p(x_j|y_k)$

に対して、

$$I(X;Y)=\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1}p(x_j,y_k)\,I(x_j;y_k)=\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1}p(x_j,y_k)\log_2\frac{p(x_j|y_k)}{p(x_j)}$$

$$=-\sum_{j=0}^{J-1}p(x_j)\underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{K-1}p(y_k|x_j)}}_{=1}\log_2 p(x_j)+\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1}p(x_j,y_k)\log_2 p(x_j|y_k)$$

$$=-\sum_{j=0}^{J-1}p(x_j)\log_2 p(x_j)+\sum_{j=0}^{J-1}p(y_k)\sum_{k=0}^{K-1}p(x_j|y_k)\log_2 p(x_j|y_k)$$

$$=H(X)-H(X|Y)$$

その他の関係

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = \underbrace{H(Y) - H(Y|X)}_{} = I(Y;X) \geq 0$$

$$-\sum_{k=0}^{K-1} p(y_k)\log_2 p(y_k) + \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j) \sum_{k=0}^{K-1} p(y_k|x_j)\log_2 p(y_k|x_j)$$

$$I(X;Y) = \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(x_j, y_k)\log_2 \frac{p(x_j|y_k)}{p(x_j)} \qquad \frac{p(x_j|y_k)}{p(x_j)} \ \text{:}\quad p(x_j|y_k) = \frac{p(x_j, y_k)}{p(y_k)} = \frac{p(y_k|x_j)p(x_j)}{p(y_k)}$$

$$= \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(y_k|x_j)p(x_j)\log_2 \boxed{\frac{p(y_k|x_j)}{\sum_{j'=0}^{J-1} p(y_k|x_{j'})p(x_{j'})}}$$

通信路容量

- 通信路容量

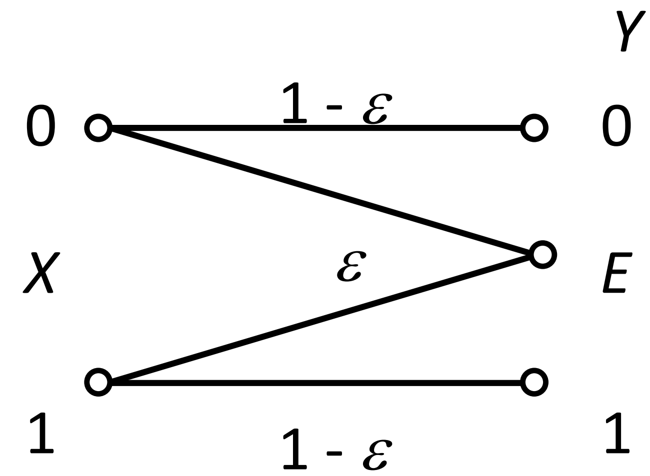
  平均伝達情報量の最大値
  （誤りなく伝達できる平均伝達情報量の最大値）

$$C = \max_{p(x_j)} I(X;Y)$$

$$C = \sum_{k=0}^{K-1} p\left(y_k \middle| x_j\right) \log_2 \frac{p\left(y_k \middle| x_j\right)}{\sum_{j'=0}^{J-1} p\left(y_k \middle| x_{j'}\right) p\left(x_{j'}\right)} \quad (p\left(x_j\right) > 0\text{のとき})$$

2元消失通信路の例（1）

- 平均伝達情報量



$$I(X;Y) = \sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} p(y_k|x_j)p(x_j)\log_2 \frac{p(y_k|x_j)}{\sum_{j'=0}^{1} p(y_k|x_{j'})p(x_{j'})}$$

$$= p(y_0|x_0)p(x_0)\log_2 \underbrace{\frac{p(y_0|x_0)}{p(y_0|x_0)p(x_0)+p(y_0|x_1)p(x_1)}}_{=\frac{1-\varepsilon}{p(x_0)(1-\varepsilon)}}$$

$$+\underbrace{p(y_0|x_1)}_{=0}p(x_1)\log_2 \frac{p(y_0|x_1)}{p(y_0|x_0)p(x_0)+p(y_0|x_1)p(x_1)}$$

$$+\underbrace{p(y_1|x_0)}_{=0}p(x_0)\log_2 \frac{p(y_1|x_0)}{p(y_1|x_0)p(x_0)+p(y_1|x_1)p(x_1)}$$

$$+p(y_1|x_1)p(x_1)\log_2 \underbrace{\frac{p(y_1|x_1)}{p(y_1|x_0)p(x_0)+p(y_1|x_1)p(x_1)}}_{=\frac{1-\varepsilon}{p(x_1)(1-\varepsilon)}}$$

$$= (1-\varepsilon)\{-p(x_0)\log_2 p(x_0) - p(x_1)\log_2 p(x_1)\}$$

２元消失通信路の例（２）

- 通信路容量

平均伝達情報量の最大値なので、

$$\frac{\partial I(X;Y)}{\partial p(x_0)} = 0$$

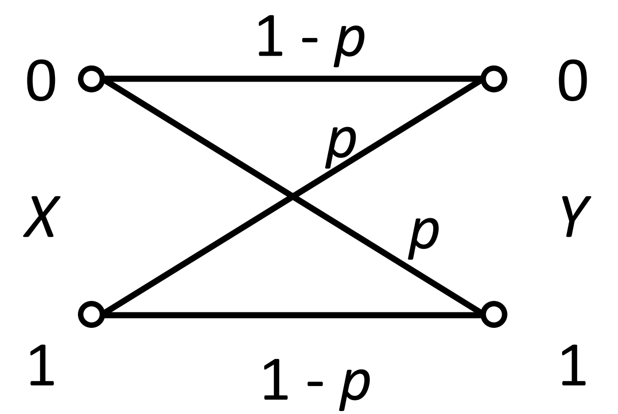
となる$p(x_0)$での$I(X;Y)$がCである。

$p(x_0) = p(x_1) = \frac{1}{2}$　であり、

$$C = 1 - \varepsilon \ [\mathrm{bit}]$$

2元対称通信路の例（1）

- 平均伝達情報量



$$I(X;Y)=\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}p(y_k|x_j)p(x_j)\log_2\frac{p(y_k|x_j)}{\sum_{j'=0}^{1}p(y_k|x_{j'})p(x_{j'})}$$

$$=p(y_0|x_0)p(x_0)\log_2\frac{p(y_0|x_0)}{p(y_0|x_0)p(x_0)+p(y_0|x_1)p(x_1)}$$

$$=\frac{1-p}{p(x_0)(1-p)+p(x_1)p}$$

$$+p(y_0|x_1)p(x_1)\log_2\frac{p(y_0|x_1)}{p(y_0|x_0)p(x_0)+p(y_0|x_1)p(x_1)}$$

$$+p(y_1|x_0)p(x_0)\log_2\frac{p(y_1|x_0)}{p(y_1|x_0)p(x_0)+p(y_1|x_1)p(x_1)}$$

$$=\frac{p}{p(x_0)p+p(x_1)(1-p)}$$

$$+p(y_1|x_1)p(x_1)\log_2\frac{p(y_1|x_1)}{p(y_1|x_0)p(x_0)+p(y_1|x_1)p(x_1)}$$

２元対称通信路の例（２）

$p(x_0)(1-p)+p(x_1)p=1-z, p(x_0)p+p(x_1)(1-p)=z$とおくと、

$I(X;Y)=\{-z\log_2 z-(1-z)\log_2(1-z)\}-\{-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)\}$

- 通信路容量

$$\frac{\partial I(X;Y)}{\partial p(x_0)}=0$$

となる$p(x_0)=p(x_1)=\frac{1}{2}$であり、

$C=1-H(p)$ [bit]

雑音による通信路容量

- 雑音のない通信路

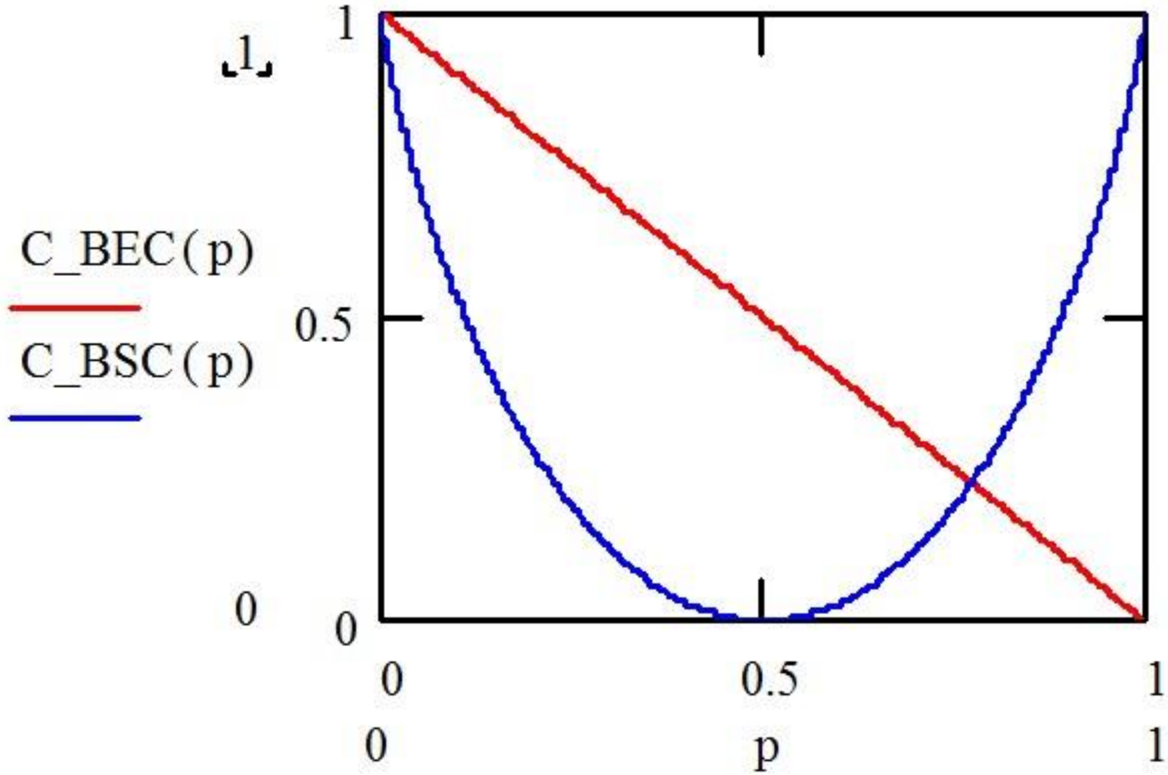
$$C = 1 - H(p) = 1[\mathrm{bit}]$$

- 雑音だらけの通信路

$$C = 1 - H(p) = 1 - 1 = 0[\mathrm{bit}]$$

なにも情報を送れない

通信路容量の誤り率依存性



まとめ

- 通信路は条件付確率（遷移確率）で表現可能

$$p(y_k|x_j) = P(Y = y_k|X = x_j)$$

- 結合確率（エントロピー）の条件付確率による表現

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$$

- 相互情報量は通信路による損失を考慮したエントロピー

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$

- 通信路容量は入力発生確率に対する最大相互情報量

$$C = \max_{p(x_j)} I(x;y)$$