

フーリエ解析・ラプラス変換

第13回

科学技術創成研究院 小尾高史

すずかけ台キャンパス R2-326

E-mail: obi@isl.titech.ac.jp

Tel: 045-924-5482

第11回レポート課題

1. フーリエ変換 I の各性質が成り立つことを示しなさい

線形性、対称性、: 定義式に代入すれば自明、

共役: オイラーの公式を用いて、 $\sin$, $\cos$ で表せば自明

相似性: $a > 0$ と $a < 0$ に分けて考え、変数変換して書き表せば示すことができる

移動性: 変数変換すれば、示すことができる

2. 相関関数 $h(x)$ のフーリエ変換を $f(x)$, $g(x)$ のフーリエ変換 (共役複素数を含む) を用いて表しなさい。

合成積と同様にすると

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f \star g] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f \star g(x) e^{-iux} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) g(y) dy \cdot e^{-iux} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) \cdot e^{-iux} dx \right\} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cdot e^{-iu(t'-y)} dt' \right\} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{+iuy} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cdot e^{-iut'} dt' \right\} dy = \sqrt{2\pi} F(u) G(-u) = \sqrt{2\pi} F(u) \overline{G(u)}\end{aligned}$$

第12回小テスト

2. $\mathcal{L}[\cos(2t - 6) H(t - 3)]$ を求めよ

$$\mathcal{L}[\cos 2t] = \frac{s}{s^2 + 4} \text{より}$$

$$\mathcal{L}[\cos(2t - 6) H(t - 3)] = \mathcal{L}[\cos\{2(t - 3)\} H(t - 3)]$$

$$= e^{-3s} \mathcal{L}[\cos 2t] = \frac{se^{-3s}}{s^2 + 4}$$

3. $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s-2)} \right]$ を求めよ

$$\frac{1}{s(s-2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s} \right) \text{より}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s-2)} \right] = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s} \right) \right] = \frac{1}{2} (e^{2t} - 1)$$

ラプラス変換の公式 II

$f(t)$	$F(s)$
$H(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$f(t - a)H(t - a)$	$e^{-as}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)ds$
$\frac{f(t)}{t^n}$	$\int_s^\infty \int_s^\infty \dots \int_s^\infty F(s)ds^n$
$f(t) * g(t)$	$F(s)G(s)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{s}F(s)$
$\delta(t)$	1

ラプラス変換Ⅱ

関数方程式への応用

- 定数係数線形常微分方程式
- 連立1階線形常微分方程式
- 積分方程式

定数係数線形常微分方程式

n 階定数係数線形常微分方程式

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = f(t) \quad t > 0$$

($a_1, \dots, a_n$ は定数、 $f(t)$ は、 $t \geq 0$ で定義される関数)

を初期条件

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$$

のもとで解く

導関数のラプラス変換の公式より、両辺をラプラス変換すると

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n)Y(s) = b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n + F(s)$$

但し、 $b_k = a_{k-1}c_0 + a_{k-2}c_1 + \cdots + a_0 c_{k-1}$ ($a_0 = 1, k = 1, \dots, n$)

従って、

$$Y(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} + \frac{F(s)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

より、両辺の逆ラプラス変換を求めれば、解 $y(t)$ $t > 0$ が得られる。

例題

$y' + ay = b, \quad y(0) = c$ を解け

両辺をラプラス変換すると

$$sY(s) - c + aY(s) = b/s$$

となるので、

$$Y(s) = \frac{c}{s+a} + \frac{b}{s(s+a)} = \frac{c}{s+a} + \frac{b}{a} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right)$$

よって両辺を逆ラプラス変換して

$$y(t) = ce^{-at} + \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$

連立1階線形常微分方程式

連立1階線形常微分方程式

$$y'_1(t) + a_{11}y_1(t) + \cdots + a_{1n}y_n(t) = f_1(t)$$

$$\vdots$$

$$y'_n(t) + a_{n1}y_1(t) + \cdots + a_{nn}y_n(t) = f_n(t)$$

の初期条件

$$y_1(0) = \alpha_1, y_2(0) = \alpha_2, \cdots, y_n(0) = \alpha_n$$

に対する解は、両辺をラプラス変換して得られる連立方程式

$$(a_{11} + s)Y_1(s) + \cdots + a_{1n}Y_n(s) = \alpha_1 + F_1(s)$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}Y_1(s) + \cdots + (a_{nn} + s)Y_n(s) = \alpha_n + F_n(s)$$

を、 $Y_1(s), Y_2(s), \cdots, Y_n(s)$ について解き、その逆変換をもとめることで得られる。

例題

次の連立方程式を解け

$$\begin{cases} y' - y - z = e^t \\ z' + y - z = 0 \end{cases} \quad (y(0) = 0, z(0) = 1)$$

両辺をラプラス変換すると

$$\begin{cases} (s-1)Y(s) - Z(s) = 1/(s-1) \\ Y(s) + (s-1)Z(s) = 1 \end{cases}$$

となるため、 $Y(s), Z(s)$ を解くと

$$Y(s) = \frac{2}{(s-1)^2+1}, Z(s) = \frac{(s-1)^2-1}{((s-1)^2+1)(s-1)} = \frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1} - \frac{1}{s-1}$$

逆ラプラス変換を求めると

$$y(t) = 2e^t \sin t, \quad z(t) = e^t(2 \cos t - 1)$$

例題(変数係数常微分方程式)

次の変数係数常微分方程式を解け

$$ty'(t) + y(t) = t, \quad y(0) = 0$$

両辺をラプラス変換して

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[ty'(t)] + Y(s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y'(t)] + Y(s) \\ &= -\frac{d}{ds}(sY(s)) + Y(s) = -Y(s) - sY'(s) + Y(s) = \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

よって、 $Y'(s) = -\frac{1}{s^3}$ より、 $Y(s) = \frac{1}{2s^2} + C$ (C : 任意定数)

両辺を逆ラプラス変換して、

$$y(t) = \frac{1}{2}t + C\delta(t)$$

初期条件より、

$$y(t) = \frac{1}{2}t$$

積分方程式

関数 $f(t)$, $k(t)$ が与えられたとき、未知関数 $x(t)$ に関する合成型積分方程式

$$f(t) = x(t) - \lambda \int_0^t k(t - \tau)x(\tau)d\tau$$

は、合成積のラプラス変換の公式を用いると

$$F(s) = X(s) - \lambda K(s)X(s)$$

となるので、

$$X(s) = \frac{F(s)}{1 - \lambda K(s)}$$

の逆変換を求めればよい。

例題

次の合成型積分方程式を解け

$$1 = x(t) - \int_0^t (t - \tau)x(\tau)d\tau$$

両辺をラプラス変換すると

$$\frac{1}{s} = X(s) - \frac{1}{s^2}X(s)$$

となるため、 $X(s)$ について解けば

$$X(s) = \frac{s}{s^2 - 1}$$

従って、逆ラプラス変換を求めて、

$$x(t) = \cosh t$$