2016年度　論理回路理論　演習２　解答

1. 次の論理関数 F について，以下の二通りの手法でリード-マラー表現を求めよ．

$$F(x,y,z) = x\overline{y} \vee (x \oplus y\overline{z})$$

(1) 真理値表を書き，教科書 38 ページの 2.6 式に代入する手法 (7 点)

(2) $\bar{x} = x \oplus 1$，$x \vee y = x \oplus y \oplus xy$ の置き換えを用いる手法 (7 点)

解答

(1) 解答例

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= x\bar{y} \vee (x \oplus y\bar{z}) \\ &= x\bar{y} \vee x\overline{y\bar{z}} \vee \bar{x}y\bar{z} \\ &= x\bar{y} \vee xz \vee \bar{x}y\bar{z} \end{aligned}$$

よって F の真理値表は表のようになる．

表 1: $F(x,y,z)$ の真理値表

x	y	z	$F(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

教科書 38 ページの式 2.6 に代入すると，$F(x,y,z)$ のリード-マラー表現は以下のよう

になる．

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= (0\oplus 0\oplus 1\oplus 0\oplus 1\oplus 1\oplus 0\oplus 1)xyz \\
&\quad \oplus(0\oplus 1\oplus 1\oplus 0)xy\oplus(0\oplus 0\oplus 1\oplus 0)yz\oplus(0\oplus 0\oplus 1\oplus 1)zx \\
&\quad \oplus(0\oplus 1)x\oplus(0\oplus 1)y\oplus(0\oplus 0)z\oplus 0 \\
&= yz\oplus x\oplus y
\end{aligned}
$$

(2) 解答例

$$F(x,y,z)=x\bar{y}\vee(x\oplus y\bar{z})$$

$\bar{x}=x\oplus 1$ の置き換えを適用すると，

$$F(x,y,z)=x(y\oplus 1)\vee(x\oplus y(z\oplus 1))$$

となる．ここに更に $x\vee y=x\oplus y\oplus xy$ の置き換えを適用すると，

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= x(y\oplus 1)\oplus(x\oplus y(z\oplus 1))\oplus x(y\oplus 1)(x\oplus y(z\oplus 1)) \\
&= yz\oplus x\oplus y
\end{aligned}
$$

となり，(1) と同様の結果が得られる．

2. 以下のそれぞれの関数について真理値表を書き,
（自己双対関数・自己反双対関数・変数 x についてユネイトな関数）
のうち当てはまるものがあれば全て挙げ, その理由を述べよ.
8 点* 3: 真理値表 2 点, 全て挙げていたら 4 点, 理由 2 点.

(1) $x \oplus y \oplus z$

(2) $\bar{y}((x \oplus z) \vee xz) \vee xyz$

(3) $\bar{x}\bar{z} \vee x(y \oplus z) \vee z(x \oplus y \oplus 1)$

解答

(1) $x \oplus y \oplus z$

x	y	z	$x \oplus y \oplus z$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

中央を境に値が反対称になっているためこれは自己双対関数である.
（自己双対であることから自己反双対関数でないことは自明.
$0 \oplus y \oplus z > 1 \oplus y \oplus z$ となる y, z の組み合わせと
$0 \oplus y \oplus z < 1 \oplus y \oplus z$ となる y, z の組み合わせが存在するため
x に関してユネイトではない.)

(2) $\bar{y}((x \oplus z) \vee xz) \vee xyz$

x	y	z	$\bar{y}((x \oplus z) \vee xz) \vee xyz$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

中央を境に値が反対称になっているためこれは自己双対関数である.
またすべての x, y の組み合わせについて
$\bar{y}((0 \oplus z) \vee xz) \vee 0 \cdot yz \leq \bar{y}((1 \oplus z) \vee xz) \vee 1 \cdot yz$
となるため変数 x に関してユネイトな関数である.
（自己双対であることから自己反双対関数でないことは自明.)

(3) $\bar{x}\bar{z} \vee x(y \oplus z) \vee z(x \oplus y \oplus 1)$

x	y	z	$\bar{x}\bar{z} \vee x(y \oplus z) \vee z(x \oplus y \oplus 1)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

中央を境に値が対称になっているためこれは自己反双対関数である.
(自己反双対であることから自己双対関数でないことは自明.
$\bar{0}\bar{z} \vee 0 \cdot (y \oplus z) \vee z(0 \oplus y \oplus 1) > \bar{1}\bar{z} \vee 1 \cdot (y \oplus z) \vee z(1 \oplus y \oplus 1))$
となる y, z の組み合わせと
$\bar{0}\bar{z} \vee 0 \cdot (y \oplus z) \vee z(0 \oplus y \oplus 1) < \bar{1}\bar{z} \vee 1 \cdot (y \oplus z) \vee z(1 \oplus y \oplus 1))$
となる y, z の組み合わせが存在するため
x に関してユネイトではない.)

3. 以下の空欄を埋めよ．その際できるだけ簡単化した式を記入すること．

論理代数方程式 $ax \vee \bar{a} \leq b$ を解くことを考える．

まず上記の論理代数方程式を $F(x) = 1$ と置く．

ただし $F(x) =$ $\boxed{a\bar{x} \vee b \text{ (6点)}}$ である．

そうすると $F(0) =$ $\boxed{a \vee b \text{（4点）}}$

$F(1) =$ $\boxed{b \text{ (4点)}}$

が導かれ，この論理方程式の解 x が存在する必要十分条件は

$\boxed{a \vee b = 1 \text{（6点）}}$ とわかる．

これを踏まえると解 x は任意の数を表す記号 α を用いて

$x =$ $\boxed{\bar{a}\bar{b} \vee \alpha b \text{（6点）}}$ と表せる．

参考

$A \leq B \iff \bar{A} \vee B = 1$

真理値表を書けば容易に導ける

4. 次のように，リード-マラー表現で表したときに二次の項を持たないような論理関数 F を線形関数という．

条件 A

$$F(x_N, x_{N-1}, \ldots, x_1) = a_N x_N \oplus a_{N-1} x_{N-1} \oplus \cdots \oplus a_1 x_1 \oplus a_0, \quad a_i \in \{0, 1\}$$

また，次の条件は論理関数 F が線形関数であるための必要十分条件である．

条件 B

$$F(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}, 0, x_{i-1}, \ldots, x_1) \oplus F(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}, 1, x_{i-1}, \ldots, x_1) = b_i,$$

$$\forall i \ (1 \leq i \leq N), \ b_i \in \{0, 1\}$$

以上を踏まえて次の論理関数が線形関数であるか否かを理由とともに答えよ．（各 9 点 ×4）

(1) $F_1(x, y, z) = y(x \oplus z) \vee \overline{y}(xz \vee \bar{x}\bar{z})$

(2) $F_2(x, y, z) = x(\bar{y} \vee z) \vee \bar{x}y\bar{z}$

(3) $F_3(w, x, y, z) = y(\overline{w \oplus x}) \vee \bar{y}(w \oplus x \oplus z)$

(4) $F_4(w, x, y, z) = xy \oplus z \oplus (w\bar{x} \vee (w \oplus x\bar{y}))$

解答

(1) 解答例 1

以下のような関数 G_3 を定義する．$G_3(F_1, x), G_3(F_1, y), G_3(F_1, z)$ が全て定数となることを示す．

$$\begin{cases} G_3(F_1, x) = F_1(0, y, z) \oplus F_1(1, y, z) \\ G_3(F_1, y) = F_1(x, 0, z) \oplus F_1(x, 1, z) \\ G_3(F_1, z) = F_1(x, y, 0) \oplus F_1(x, y, 1) \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
G_3(F_1, x) &= (y(0 \oplus z) \vee \bar{y}(0 \vee \bar{z})) \oplus (y(1 \oplus z) \vee \bar{y}(z \vee 0)) \\
&= (yz \vee \bar{y}\bar{z}) \oplus (y\bar{z} \vee \bar{y}z) \\
&= (y \oplus z \oplus 1) \oplus (y \oplus z) \\
&= 1 \\
G_3(F_1, y) &= (xz \vee \bar{x}\bar{z}) \oplus (x \oplus z) \\
&= (x \oplus z \oplus 1) \oplus (x \oplus z) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$G_3(F_1, z)$ については,

$$
\begin{aligned}
F_1(z, y, x) &= y(z \oplus x) \vee \overline{y}(zx \vee \bar{z}\bar{x}) \\
&= y(x \oplus z) \vee \overline{y}(xz \vee \bar{x}\bar{z}) \\
&= F_1(x, y, z)
\end{aligned}
$$

が成り立つため, $G_3(F_1, z) = G_3(F_1, x) = 1$ となる. 以上より条件 B を満たすので, F_1 は線形関数である.

(1) 解答例 2

$\overline{x \oplus y} = xy \vee \bar{x}\bar{y}$ を用いて,

$$
\begin{aligned}
F_1(x, y, z) &= y(x \oplus z) \vee \bar{y}(xz \vee \bar{x}\bar{z})) \\
&= y(x \oplus z) \vee \bar{y}\overline{(x \oplus z)} \\
&= \overline{y \oplus x \oplus z} \\
&= x \oplus y \oplus z \oplus 1
\end{aligned}
$$

よって条件 A より F_1 は線形関数である.

(2) 解答例

(1) と同様の関数 G_3 を定義する.

$$
\begin{aligned}
G_3(F_2, y) &= (x(1 \vee z) \vee 0) \oplus (x(0 \vee z) \vee \bar{x}\bar{z}) \\
&= x \oplus (xz \vee \bar{x}\bar{z}) \\
&= x \oplus (x \oplus z \oplus 1) \\
&= z \oplus 1
\end{aligned}
$$

$G_3(F_2, y)$ が定数ではないので条件 B を満たさない．よって F_2 は線形関数ではない．

(3) 解答例

以下のような関数 G_4 を定義する．

$$\begin{cases} G_4(F_3, w) = F_3(0, x, y, z) \oplus F_3(1, x, y, z) \\ G_4(F_3, x) = F_3(w, 0, y, z) \oplus F_3(w, 1, y, z) \\ G_4(F_3, y) = F_3(w, x, 0, z) \oplus F_3(w, x, 1, z) \\ G_4(F_3, z) = F_3(w, x, y, 0) \oplus F_3(w, x, y, 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} G_4(F_3, y) &= (0 \vee (w \oplus x \oplus z)) \oplus ((\overline{w \oplus x}) \vee 0) \\ &= (w \oplus x \oplus z) \oplus (w \oplus x \oplus 1) \\ &= z \oplus 1 \end{aligned}$$

$G_4(F_3, y)$ が定数ではないので条件 B を満たさない．よって F_3 は線形関数ではない．

(4) 解答例 1

(3) と同様の関数 G_4 を定義する．$G_4(F_4, w), G_4(F_4, x), G_4(F_4, y), G_4(F_4, z)$ が全て定数となることを示す．

$$\begin{aligned} G_4(F_4, w) &= (xy \oplus z \oplus (0 \vee (0 \oplus x\bar{y}))) \oplus (xy \oplus z \oplus (\bar{x} \vee (1 \oplus x\bar{y}))) \\ &= (xy \oplus z \oplus x\bar{y}) \oplus (xy \oplus z \oplus (\bar{x} \vee \overline{x\bar{y}})) \\ &= (xy \oplus z \oplus x\bar{y}) \oplus (xy \oplus z \oplus \overline{x\bar{y}}) \\ &= 1 \\ G_4(F_4, x) &= (0 \oplus z \oplus (w \vee (w \oplus 0))) \oplus (y \oplus z \oplus (0 \vee (w \oplus \bar{y}))) \\ &= (z \oplus w) \oplus (y \oplus z \oplus w \oplus \bar{y}) \\ &= 1 \\ G_4(F_4, y) &= (0 \oplus z \oplus (w\bar{x} \vee (w \oplus x))) \oplus (x \oplus z \oplus (w\bar{x} \vee (w \oplus 0))) \\ &= (z \oplus (w\bar{x} \vee w\bar{x} \vee \bar{w}x)) \oplus (x \oplus z \oplus w) \\ &= (z \oplus w \oplus x) \oplus (x \oplus z \oplus w) \\ &= 0 \\ G_4(F_4, z) &= (xy \oplus 0 \oplus (w\bar{x} \vee (w \oplus x\bar{y})) \oplus (xy \oplus 1 \oplus (w\bar{x} \vee (w \oplus x\bar{y})) \\ &= 1 \end{aligned}$$

条件 B を満たすので F_4 は線形関数である．

(4) 解答例 2

大問 1 の結果より

$$x\overline{y} \vee (x \oplus y\overline{z}) = yz \oplus x \oplus y$$

である．これを用いると

$$w\overline{x} \vee (w \oplus x\overline{y}) = xy \oplus w \oplus x$$

が成り立つことがわかる．よって

$$\begin{aligned} F_4(w,x,y,z) &= xy \oplus z \oplus (xy \oplus w \oplus x) \\ &= w \oplus x \oplus z \end{aligned}$$

となる．条件 A より F_4 は線形関数である．