

数理経済学特講

複数財オークションのアルゴリズムと 離散最適化

第11回 複数需要モデルと均衡

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

これまでの講義内容

- 供給は複数, 需要は単一のオークションモデル
 - ワルラス均衡の定義
 - 均衡の存在性
 - 常に存在
 - 均衡の性質
 - 均衡配分 = 最大重みマッチング
 - 均衡価格 = 双対問題の最適解 (の一部)
 - 均衡の計算
 - 評価値が所与: 最大重みマッチングを利用
 - 評価値が不明, 需要集合の要素が所与:
均衡を近似に求めるアルゴリズム
 - 評価値が不明, 需要集合全体が所与:
均衡価格を厳密に求めるアルゴリズム

今後の講義内容

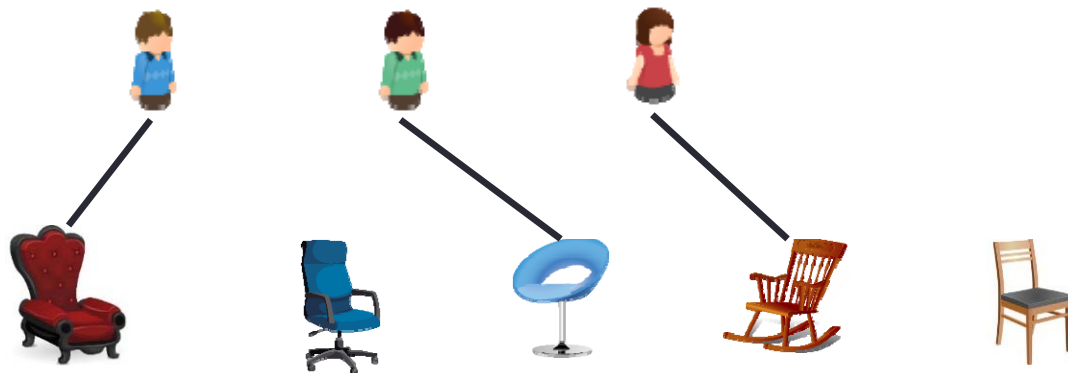
- 供給は複数, 需要も複数のオークションモデル
 - ワルラス均衡の定義
 - 均衡の存在性
 - 存在するとは限らない
 - 評価値が粗代替性を満たす→存在
 - 均衡の性質
 - 均衡配分＝総評価値最大の財の配分
 - 均衡価格＝双対問題の最適解(の一部)
- 粗代替性の性質: 単改良性, M凹性
- 均衡の計算
 - 評価値が所与: 総評価値最大の財の配分を求めるアルゴリズム
 - 評価値が不明, 需要集合の要素が所与:
均衡を近似に求めるアルゴリズム
 - 評価値が不明, 需要集合全体が所与:
均衡価格を厳密に求めるアルゴリズム

複数財オークション: 複数需要モデル

複数財を **同時に** オークション

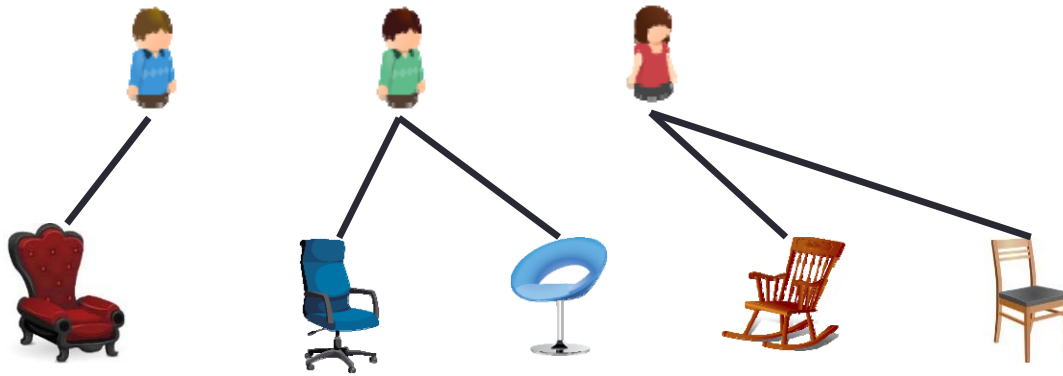
これまで授業で扱ったモデル: **単一需要モデル**

- 入札者は **高々1つ**の財が欲しい(**割当モデル**)



これから扱うモデル: **複数需要モデル**

- 入札者は**複数の財**を得ることが可能



具体例の一部:

- 周波数の割当
- 空港の離発着権
- トラック配送の請負

財集合の評価関数

- 財の評価

単一需要モデル

- 入札者は各財を評価 → 財ごとに評価値 $v(i,j)$

複数需要モデル

入札者は財の集合を評価

→ 財の集合 X に対して評価値 $v_i(X)$

集合 X に関する関数 (評価関数, valuation function)

この講義での仮定

- 空集合の評価値 $v_i(\emptyset)$ は 0
- v_i は単調非減少: $X \subseteq Y$ ならば $v_i(X) \leq v_i(Y)$

評価関数の具体例



①



②



③



④



⑤

- ①を含む財集合は100, それ以外は0 (single-minded)
- 重み和 (①: 50, ②: 70, ③: 40, ④: 30, ⑤: 100) (additive)
- 財集合 (①: 50, ②: 70, ③: 40, ④: 30, ⑤: 100) の中の
一番良い財にのみ依存 (unit-demand)
 $\{①, ②, ③\} \rightarrow$ 評価値70, $\{③, ④, ⑤\} \rightarrow$ 評価値100
- 財の数に依存 (symmetric)
(1つ: 100, 2つ: 180, 3つ: 240, 4つ: 280, 5つ: 300)

さまざまな評価関数の定義

- 一意専心 (single-minded) 評価関数:

特定の財集合 S とその価値 α を用いて,
$$v_i(X) = \begin{cases} \alpha & (X \subseteq S) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

- 加法的 (additive) 評価関数: 各財 j の評価値 $v(i, j)$ を用いて

$$v_i(X) = \sum_{j \in X} v(i, j)$$

- 対称 (symmetric) 評価関数: 単調非減少関数 $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて,

$$v_i(X) = \varphi(|X|)$$

(φ が上に凸 (concave) な場合 $\rightarrow$ 対称凹 (symmetric concave))

- 単一需要 (unit-demand) 評価関数:

各財 j の評価値 $v(i, j)$ を用いて

$$v_i(X) = \max_{j \in X} v(i, j) \quad (\text{ただし } v_i(\emptyset) = 0)$$

単一需要モデル
に対応

割当評価関数

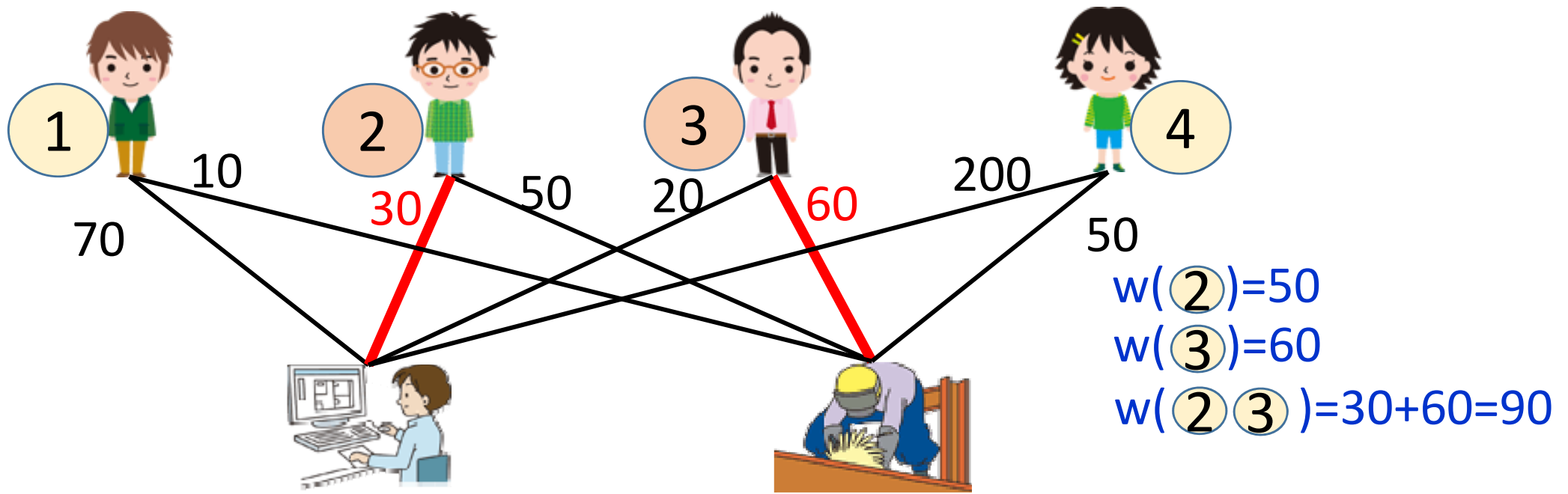
割当 (assignment) 評価関数: 最大重みマッチングで評価値が定まる
イメージ—ある工場の就職担当が,

k人の労働者(「財」)を雇って, k個の仕事に割り当てたい

w_{jh} = 労働者 j を仕事 $h \in \{1, 2, \dots, k\}$ に割り当てたときの利益

$v_i(X)$ = 労働者 X を仕事 $\{1, 2, \dots, k\}$ に割り当てたときの最大利益

$$= \max \left\{ \sum_{(j,h) \in M} w_{jh} \mid M: \text{マッチング, } X \text{ をカバー} \right\}$$



需要集合

- 財 $N=\{1,2,\dots,n\}$ を入札者 $M = \{1,2,\dots,m\}$ に配分
→ $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ と表記
 - X_i = 入札者 i へ割り当てられた財集合
 - X_0 = 誰にも割り当てられなかった財集合
- 定義: 需要集合 $D_i(p) \subseteq 2^N$
 - $D_i(p) = \arg \max \{v_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$

価格 p の下で
最も欲しい
財集合全体

需要集合の具体例



①



②



③



④



⑤

例: $p = (60, 60, 60, 60, 60)$ のとき

- Aさん: ①を含む財集合は100, それ以外は0
→ $D_A(p) = \{ \{1\} \}$
(欲しい財以外は, 価格>0ならば選ばない)
- Bさん: 重み和 (①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100)
→ $D_B(p) = \{ \{2, 5\} \}$
(評価値>価格なら選ぶ, 評価値<価格なら選ばない)
- Cさん: 財の数依存 (1つ:100, 2つ:180, 3つ:240, 4つ:280, 5つ:300)
→ $D_C(p) = \{ \text{財の数2または3} \}$

ワルラス均衡

- 定義: 需要集合 $D_i(p) \subseteq 2^N$
 - $D_i(p) = \arg \max \{v_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$
- 定義: 価格ベクトル p^* と財の配分 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ の組は **ワルラス均衡**
 $\iff X_i \in D_i(p^*) \ (i = 1, \dots, m), \quad p(j) = 0 \ (\forall j \in X_0)$

価格 p^* の下で
皆が最良の
財集合

例: $p = (60, 60, 60, 60, 60)$ のとき

- Aさん: $D_A(p) = \{ \{1\} \}$
- Bさん: $D_B(p) = \{ \{2, 5\} \}$
- Cさん: $D_C(p) = \{\text{財の数2または3}\}$

$\rightarrow p$ と配分 $\{\emptyset, \{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$ はワルラス均衡

※各評価関数が単調非減少のとき,
均衡において $X_0 = \emptyset$ と仮定できる
($\because$ 価格0の財を追加配分しても, 利得は減らない)

ワルラス均衡が存在しない例

- ワルラス均衡は存在するとは限らない

X	$v_A(X)$	$v_B(X)$
$\emptyset$	0	0
①	2	0
②	2	0
①, ②	2	3

均衡が存在したと仮定：

- $X_0 = \emptyset$ なる均衡が存在
- 財1のみをAに割当 $\rightarrow$ 財2の価格 ≥ 2
- 財2のみをBに割当 $\rightarrow$ 財2の価格 = 0 (矛盾)
- $\therefore$ 可能な割当は、入札者AまたはBに全部
- Bに全部 $\rightarrow$ 総価格 $\leq 3 \rightarrow$ 財1または2の価格 < 2
 $\rightarrow$ その財をAに割り当てると利得増加 (矛盾)
- Aに全部 $\rightarrow$ 総価格 ≤ 2
 一方、Bの割当 = $\emptyset$ なので、総価格 ≥ 3 (矛盾)

単一需要と複数需要の場合の均衡の比較

- 単一需要モデルにおけるワルラス均衡
≡ 複数需要モデルで単一需要評価関数の場合のワルラス均衡

より具体的には,

- 一方のワルラス均衡から, 他方のワルラス均衡を簡単に作れる
- 一方の均衡価格は, 他方でも均衡価格

∴ 単一需要モデルは, 複数需要モデルの特殊ケースと見なせる

複数需要の均衡から単一需要の均衡へ

- 複数需要モデルの場合の均衡から,
単一需要モデルの均衡を作る方法

定義: 価格ベクトル p^* と財の配分 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ の組は
(複数需要モデルにおける) **ワルラス均衡**

$$\iff X_i \in D_i(p^*) \quad (i = 1, \dots, m), \quad p(j) = 0 \quad (\forall j \in X_0)$$

以下, 簡単のために, 各 X_i ($i=1,2,\dots,m$) は非空と仮定

示すこと: 各 X_i ($i=1,2,\dots,m$) の中に,

価格 > 0 の財 j^* は高々1つ, その財は X_i の中で評価値最大

$$\rightarrow v(i, j^*) - p(j^*) = v_i(X_i) - p(X_i) \geq v_i(\{j\}) - p(\{j\}) = v(i, j) - p(j)$$

$\therefore$ 配分を $\alpha(i) = X_i$ の中で評価値最大の財 とすると,

この配分と価格 $p(j)$ は単一需要モデルの均衡

単一需要関数の需要集合の性質

単一需要評価関数に対する需要集合

$$\begin{aligned} \bullet D_i(p) &= \arg \max \{v_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\} \\ &= \arg \max \left\{ \max_{j \in X} v(i, j) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N \right\} \end{aligned}$$

$\therefore X \in D_i(p)$ のとき

X の中に価格 > 0 の財 j^* は高々1つ

($\because$ 2つ以上存在 $\rightarrow$ 1つを除いて削除した方が利得大)

$v(i, j^*) = \max_{j \in X} v(i, j)$ を満たす

($\because$ 評価値最大でない財の価格 $> 0 \rightarrow$ 削除した方が利得大)

ワルラス均衡と総評価値最大化

単一需要モデルの場合： 均衡配分 $\rightarrow$ 総評価値最大

命題：

財の配分 $\alpha(i)$ ($i \in B$) と価格 $p(j)$ ($j \in N$) の組が均衡のとき：

- (i) 配分 $\alpha(i)$ は最大重みマッチング
- (ii) 任意の最大重みマッチング M' と価格 $p(j)$ ($j \in N$) の組は均衡

複数需要モデルの場合： 均衡配分 $\rightarrow$ 総評価値最大

命題：

財の配分 $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ と価格 $p(j)$ ($j \in N$) の組が均衡のとき：

- (i) $\sum_{i=1}^m v_i(X_i) = \max \{ \sum_{i=1}^m v_i(Y_i) \mid (Y_0, Y_1, \dots, Y_m) \text{ は財の配分} \}$
- (ii) 上記式の右辺の最適解 $(Y_0^*, Y_1^*, \dots, Y_m^*)$ に対し,
価格 $p(j)$ ($j \in N$) との組は均衡

均衡配分ならば総評価値最大

(i) の証明: 任意の配分 $(Y_0, Y_1, \dots, Y_m)$ に対し

$\sum_{i=1}^m v_i(X_i) \geq \sum_{i=1}^m v_i(Y_i)$ を証明すれば良い.

仮定より, 各 i について $v_i(X_i) - \sum_{j \in X_i} p_j \geq v_i(Y_i) - \sum_{j \in Y_i} p_j$

片々足すと,

$$\begin{aligned} (*) \quad \sum_{i=1}^m v_i(X_i) - \sum_{j \in N} p_j &= \sum_{i=1}^m v_i(X_i) - \sum_{j \in N \setminus X_0} p_j \\ &\geq \sum_{i=1}^m v_i(Y_i) - \sum_{j \in N \setminus Y_0} p_j \geq \sum_{i=1}^m v_i(Y_i) - \sum_{j \in N} p_j \end{aligned}$$

(ii) の証明: $Y_i = Y_i^*$ のとき, $\sum_{i=1}^m v_i(X_i) = \sum_{i=1}^m v_i(Y_i)$

$\therefore$ 不等式 $(*)$ の不等号は等号で成立

$\therefore v_i(Y_i^*) - \sum_{j \in Y_i} p_j = v_i(X_i) - \sum_{j \in X_i} p_j$ よって $Y_i^* \in D_i(p)$

$$p(j) = 0 \quad (\forall j \in Y_0^*)$$

代替性と補完性

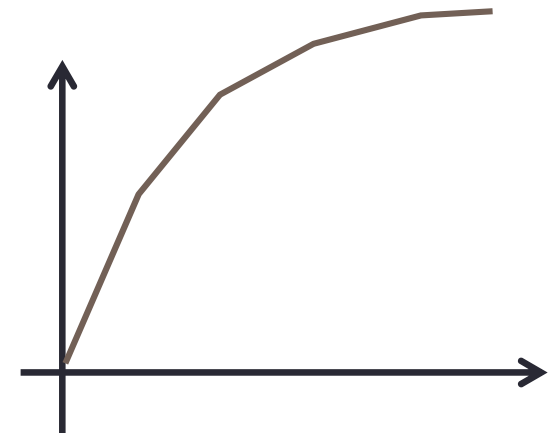
- 2つの財の関係
 - **代替的**： 2つの財が類似，一方を他方で置き換え可能
どちらかがあれば嬉しい
両方あっても，あまり嬉しくない
 - 具体例：紅茶とコーヒー，2種類のいす，レタスとキャベツ
 - **補完的**： 2つの財の性能・能力が補完的
両方あれば嬉しい，片方だけでは不十分
 - 具体例：食卓と椅子，プリンタとインク，ゲーム機とソフト
- 財の集合が**代替的(補完的)**
 - ◀→ 集合内の任意の2つの財が**代替的(補完的)**

この講義：**代替的な財(代替財)**を主に扱う

代替財に対応する評価関数の例

ポイント: 財集合の評価値 $\leq$ 個々の評価値の和

- 重み和 (①: 50, ②: 70, ③: 40, ④: 30, ⑤: 100) (additive)
- 財集合 (①: 50, ②: 70, ③: 40, ④: 30, ⑤: 100) の中の
一番良い財にのみ依存 (unit-demand)
{①, ②, ③} $\rightarrow$ 評価値 70, {③, ④, ⑤} $\rightarrow$ 評価値 100
- 財の数に依存, かつ上に凸 (symmetric & concave)
(1つ: 100, 2つ: 180, 3つ: 240, 4つ: 280, 5つ: 300)



より一般的な評価関数: 粗代替的評価関数

粗代替性 $\equiv$ ある財が値上がりしたら, 他の財の欲しさが高まる

定義: 評価関数 $v_i: 2^N \rightarrow \mathbb{Z}_+$ は

粗代替性(gross-substitutes condition)を満たす [Kelso-Crawford(1982)]

$$\iff \forall p \in \mathbb{R}^N, q = p + \lambda e_j,$$

$$\forall X \in D_i(p), \exists Y \in D_i(q)$$

$$\text{s.t. } X \setminus \{j\} \subseteq Y$$

$$D_i(p) = \arg \max \{v_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$$

前ページの評価関数は粗代替性を満たす

定理 [Kelso-Crawford(1982)]:

各入札者の評価関数が粗代替性を満たす $\rightarrow$ ワルラス均衡が存在

粗代替性を満たす評価関数の例

- 重み和 (①: 50, ②: 70, ③: 40, ④: 30, ⑤: 100) (additive)

$p = (40, 80, 10, 60, 100)$ のとき $D_i(p) = \{\{1, 3\}, \{1, 3, 5\}\}$
 $\rightarrow q = (60, 80, 10, 60, 100)$ のとき $D_i(q) = \{\{3\}, \{3, 5\}\}$
 よって, $X = \{1, 3\} \rightarrow Y = \{3\}$ を選べば良い
 $X = \{1, 3, 5\} \rightarrow Y = \{3, 5\}$

- 財集合 (①: 50, ②: 70, ③: 40, ④: 30, ⑤: 100) の中の
一番良い財にのみ依存 (unit-demand)

$p = (40, 80, 10, 0, 100)$ のとき $D_i(p) = \{\{3\}, \{3, 4\}\}$
 $\rightarrow q = (40, 80, 40, 0, 100)$ のとき $D_i(q) = \{\{1\}, \{1, 4\}\}$
 よって, $X = \{3\} \rightarrow Y = \{1\}$ を選べば良い
 $X = \{3, 4\} \rightarrow Y = \{1, 4\}$

演習問題

問1: 評価関数 v_1, v_2, v_3, v_4 が以下のように与えられたとき,
均衡が存在しないことを示せ.

$v_1(X)$ の値	$\{\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{23\}$	$\{13\}$	$\{123\}$
	0	4	6	8	10	8	8	10

$$v_2(X) = \begin{cases} 0 & (X = \emptyset, \{3\}) \\ 3 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$v_3(X) = \begin{cases} 1 & (1 \in X) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$v_4(X) = \begin{cases} 1 & (2 \in X) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

問2: 評価関数 v_1, v_2, v_3 が以下のように与えられたとき,
均衡を求めよ.

$v_1(X)$ の値: 問1と同じ

$$v_2(X) = \begin{cases} 0 & (X = \emptyset) \\ 4 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$v_3(X) = \begin{cases} 0 & (X = \emptyset) \\ 5 & (|X| = 1) \\ 7 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

財集合の評価関数

- 財の評価

単一需要モデル

- 入札者は各財を評価 → 財ごとに評価値 $v(i,j)$

複数需要モデル

入札者は財の集合を評価

→ 財の集合 X に対して評価値 $v_i(X)$

集合 X に関する関数 (評価関数, valuation function)

評価関数の一例

- 加法的(additive)関数: $v_i(X) = X$ に含まれる財の評価値の和
- 一意専心(single-minded)関数:
特定の財集合 X^* に対し $v_i(X^*) > 0$, それ以外は $v_i(X) = 0$
- 対称(symmetric)関数: 財の数にのみ依存

評価関数の定義

- 一意専心 (single-minded) 評価関数:

特定の財集合 S とその価値 α を用いて,
$$v_i(X) = \begin{cases} \alpha & (X \subseteq S) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

- 加法的 (additive) 評価関数: 各財 j の評価値 $v(i, j)$ を用いて

$$v_i(X) = \sum_{j \in X} v(i, j)$$

- 対称 (symmetric) 評価関数: 単調非減少関数 $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて,

$$v_i(X) = \varphi(|X|)$$

(φ が上に凸 (concave) な場合 $\rightarrow$ 対称凹 (symmetric concave))

- 単一需要 (unit-demand) 評価関数:

各財 j の評価値 $v(i, j)$ を用いて

$$v_i(X) = \max_{j \in X} v(i, j) \quad (\text{ただし } v_i(\emptyset) = 0)$$

単一需要モデル
に対応