数理経済学特講

複数財に対するオークションの数理とアルゴリズム

第7回　均衡配分と最大重みマッチングの関係

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

均衡配分と最大重みマッチングの関係

ワルラス均衡の定義：準備（再掲）

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$　財の集合（各財の在庫は1つのみ）

$B = \{1,2, \ldots, m\}$　入札者の集合

$v(i, j) \in \mathbb{R}_+$　入札者 i の 財 j に対する評価額（非負の実数値）

$\alpha(i) \in N \cup \{0\}$　入札者 i への財の配分

ただし，財が割り当てられていないとき，$\alpha(i) = 0$

仮定：$\alpha(i), \alpha(i') \in N$ ならば $\alpha(i) \neq \alpha(i')$

$p(j) \in \mathbb{R}_+$　財 j の価格（非負の実数値）

ダミーの財と見なす

ワルラス均衡(再掲)

定義: 財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ および財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$
は ワルラス均衡(競争均衡)
⇔ 以下の条件を満たす

- 入札者 i に財 j が割り当てられる($\alpha(i) = j$)
  ➔ $0 \le v(i,j) - p(j) = \max_{1 \le h \le n} \{v(i,h) - p(h)\}$
- 入札者 i に財の割り当てがない($\alpha(i) = 0$)
  ➔ $\max_{1 \le h \le n} \{v(i,h) - p(h)\} \le 0$
- 財 j が誰にも配分られない ➔ $p(j) = 0$

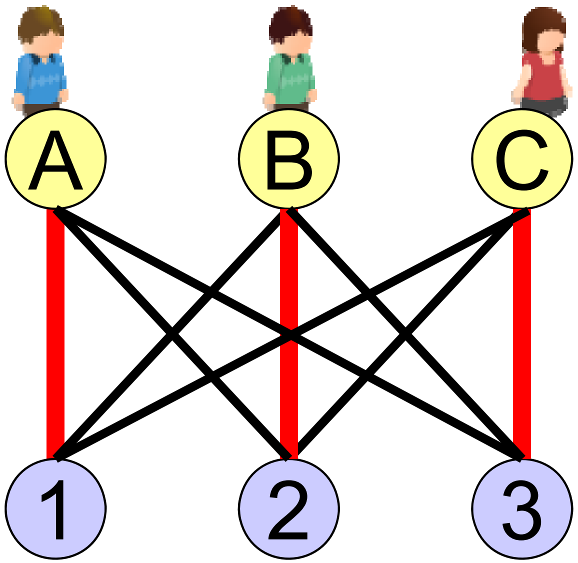
利得最大の財が割り当て

どの財も欲しくない

価格>0の財は皆売れる

- 定義: 均衡配分 = 均衡に現れる配分
  均衡価格 = 均衡に現れる価格

オークションと均衡の具体例（再掲）

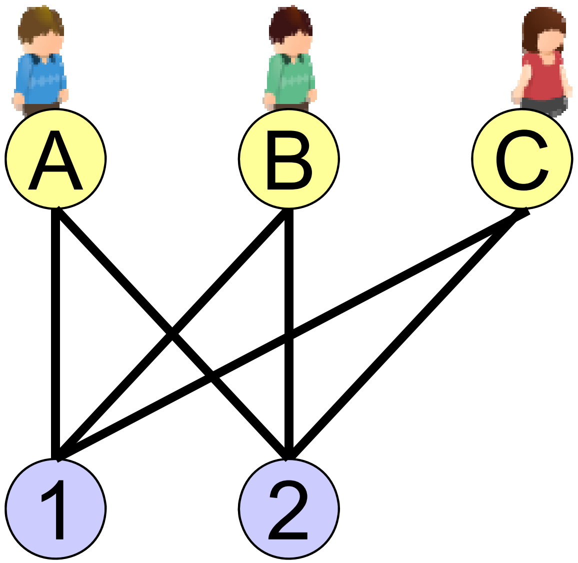


価格　0　3　2

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

価格	利得	A	B	C
0	①	3	1	1
3	②	3	2	0
2	③	0	2	2

オークションと均衡の具体例



v(i,j)	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

均衡割当は唯一

均衡価格は複数(2,6) – (6,7)

Andersson, Erlanson (2013)より

ワルラス均衡の書き換え(再掲)

- 入札者 i に財 j が割り当てられる($\alpha(i) = j$)
  ➔ $0 \leq v(i,j) - p(j) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\}$
- 入札者 i に財の割り当てがない($\alpha(i) = 0$)
  ➔ $\max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\} \leq 0$
- 財 j が誰にも割当られない ➔ $p(j) = 0$

v(i,0)=0, p(0)=0 とおく → 条件を簡略化できる

- $\forall i \in M$: $v(i,\alpha(i)) - p(\alpha(i)) = \max_{0 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\}$
- 財 j が誰にも割当られない ➔ $p(j) = 0$

オークションからマッチング問題へ

- 二部グラフを次のように定義
  - 頂点集合 $V = B \cup N$
  - 枝集合 $E = B \times N \quad (= \{ (i,j) \mid i \in B,\ j \in N \})$
  - 各枝(i,j)の重み = v(i,j)

- マッチングは財の配分と本質的に同じ（図に書けば一目瞭然）
  - マッチング M に対応する配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$

$$\alpha(i) = \begin{cases} j & ((i,j) \in M) \\ 0 & (i \text{ に接続する枝がない}) \end{cases}$$

  - 配分 $\alpha(i)$ に対応するマッチング

$$M = \{(i, \alpha(i)) | i \in B, \alpha(i) \neq 0\}$$

※重みについて $\sum_{(i,j)\in M} v(i,j) = \sum_{i\in B} v(i, \alpha(i))$ が成立

均衡配分と最大重みマッチングの関係

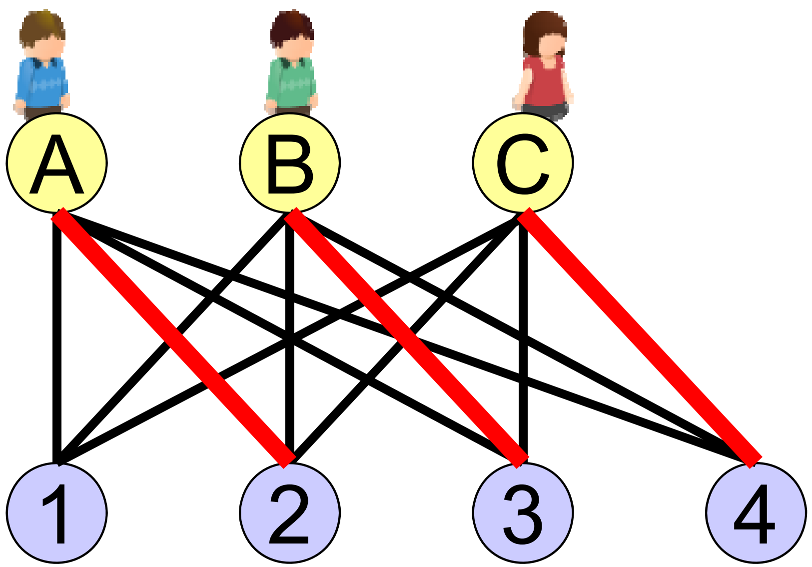
オークションの均衡配分 ＝ 最大重みマッチング

定理1： $\alpha^*(i) \in N \cup \{0\}$ は均衡配分

➔ $\alpha^*(i)$ に対応するマッチングは最大重み

定理2： M は二部グラフの最大重みマッチング

➔M に対応する配分 $\alpha^*(i) \in N \cup \{0\}$ は均衡配分



v(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

均衡配分ならば最大重みマッチング

定理1： $\alpha^*(i) \in N \cup \{0\}$ は均衡配分

➔ $\alpha^*(i)$ に対応するマッチングは最大重み

[証明]任意のワルラス均衡の配分を $\alpha^*(i) \in N \cup \{0\}$

価格を $p^*(j) \in \mathbb{R}_+$ とする

任意のマッチング（に対応する配分） $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ に対し，

$\alpha(i)$の重み $\sum_{i \in B} v(i, \alpha(i)) \leqq \alpha^*(i)$の重み $\sum_{i \in B} v(i, \alpha^*(i))$ を示す

(a) 各$i \in B$ に対し， $v(i, \alpha(i)) - p^*(\alpha(i)) \leq v(i, \alpha^*(i)) - p^*(\alpha^*(i))$

(b) $\sum_{i \in B} p^*(\alpha(i)) \leq \sum_{i \in B} p^*(\alpha^*(i))$

を示せば十分（ただし v(i,0) = p(0) = 0）

均衡配分ならば最大重みマッチング

① $v(i,\alpha^*(j)) - p^*(\alpha^*(j)) = \max_{0\le h\le n}\{w(i,h) - p^*(h)\}$
② 財 j が誰にも配分られない ➔ $p^*(j) = 0$

均衡の定義

[証明](つづき)
(a) の証明:均衡の条件①より

$$v\big(i,\alpha^*(j)\big) - p^*\big(\alpha^*(j)\big) = \max_{0\le h\le n}\{w(i,h) - p^*(h)\}$$
$$\ge v\big(i,\alpha(i)\big) - p\big(\alpha(i)\big)$$

(b) の証明
A* = 配分 $\alpha^*(i)$ にて入札者に割り当てられた財の集合
A =配分 $\alpha(i)$ にて入札者に割り当てられた財の集合
➔ 証明したい不等式は $\sum_{j\in A} p(j) \le \sum_{j\in A^*} p(j)$

$$\Leftrightarrow \sum_{j\in A\setminus A^*} p(j) \le \sum_{j\in A^*\setminus A} p(j)$$

均衡の条件②より $\sum_{j\in A\setminus A^*} p(j) = 0$
価格は非負なので $0 \le \sum_{j\in A^*\setminus A} p(j)$ [証明終わり]

最大重みマッチングならば均衡配分

定理2： M は二部グラフの最大重みマッチング

➔M に対応する配分 $\alpha^*(i) \in N \cup \{0\}$ は均衡配分

［証明］ 最大重みマッチングの必要十分条件を利用

定理3：二部グラフのマッチング M は最大重み

←➔ 次の条件を満たす非負実数 q(i) (i∈B), p(j) (j∈N) が存在

(a) 任意の枝 (i,j) に対し， q(i)+p(j) ≧ v(i,j)

(b) マッチング M に含まれる任意の枝に対し，q(i)+p(j) = v(i,j)

(c) i∈B にマッチング M の枝が接続していない ➔ q(i)=0

(d) j∈N にマッチング M の枝が接続していない ➔ p(j)=0

M に対応する配分 $\alpha^*(i) \in N \cup \{0\}$

および 「最適」双対変数 p(j) (j∈N)

が均衡の条件を満たすことを証明すれば良い

最大重みマッチングならば均衡配分

- 入札者 i に財 j が割り当てられる（$\alpha^*(i) = j$）

➔ M に枝 (i,j) が含まれる

➔ 定理3 (b) と q(i) の非負性より，v(i,j)-p(j) = q(i) ≧ 0

(a), (b) より　v(i,j) – p(j) = q(i) ≧ v(i,j') – p(j')　(∀j'∈N)

$\therefore\ 0 \leq v(i,j) - p(j) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\}$

- 入札者 i に財の割り当てがない（$\alpha^*(i) = 0$）

➔ 頂点 i にマッチングの枝が接続していない

➔定理3 (a), (c) より　0 = q(i) ≧ v(i,j') – p(j') (∀j'∈N)

$\therefore\ \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\} \leq 0$

- 財 j が誰にも配分られない

➔ 頂点 j にマッチングの枝が接続していない

➔定理3 (d)より　p(j) = 0

定理2の証明終わり

均衡の存在性

定理4：（授業で扱っている）複数財のオークションモデルにおいて
ワルラス均衡は存在

[証明] 定理2の証明を利用.

最大重みマッチング M は必ず存在.

定理2の証明より,

M に対応する配分 $\alpha^*(i) \in N \cup \{0\}$

および 「最適」双対変数 p(j) (j∈N) はワルラス均衡

[証明終わり]

均衡の性質

任意の最大重みマッチングと均衡価格のペアはワルラス均衡

定理5: ワルラス均衡 (α, p) および
最大重みマッチングに対応する配分 α'に対し,
(α', p) もまたワルラス均衡

[証明] 均衡の定義より

$\forall i \in M$: $v(i,\alpha(i)) - p(\alpha(i)) = \max_{0\le h\le n}\{v(i,h) - p(h)\}$ ①

配分 α において, 財 j が誰にも割当られない ➔ $p(j) = 0$ ②

①より, $\forall i \in M$: $v(i,\alpha(i)) - p(\alpha(i)) \ge v(i,\alpha'(i)) - p(\alpha'(i))$ ③

また, $\sum_{i\in M}[v(i,\alpha(i)) - p(\alpha(i))] = \sum_{i\in M} v(i,\alpha(i)) - \sum_{i\in M} p(\alpha(i))$

$= \sum_{i\in M} v(i,\alpha(i)) - \sum_{j\in N} p(j)$ （∵②より）

$\le \sum_{i\in M} v(i,\alpha'(i)) - \sum_{i\in M} p(\alpha(i))$ （∵ α'の最大性より）

$\le \sum_{i\in M} v(i,\alpha'(i)) - \sum_{i\in M} p(\alpha'(i))$ （∵ pの非負性より）

$= \sum_{i\in M}[v(i,\alpha'(i)) - p(\alpha'(i))]$ ④

均衡の性質

[証明の続き]
③, ④より, それぞれの不等号は等号で成立
$\therefore\ \forall i \in M$: $v\bigl(i,\alpha'(i)\bigr) - p\bigl(\alpha'(i)\bigr) = v\bigl(i,\alpha(i)\bigr) - p\bigl(\alpha(i)\bigr)$
$= \max_{0 \le h \le n} \{v(i,h) - p(h)\}$
よって, (α', p) もまたワルラス均衡　[証明終わり]

系：2つのワルラス均衡 $(\alpha, p), (\alpha', p')$ に対し,
$(\alpha, p'), (\alpha', p)$ もまたワルラス均衡

[証明]
定理1より, α, α' はともに最大重みマッチングに対応する配分
よって定理5より $(\alpha, p'), (\alpha', p)$ もまたワルラス均衡
[証明終わり]

均衡の性質

定理6：均衡価格ベクトル全体の中で，
極小なもの，および極大なものは，それぞれ唯一に定まる

[証明] 均衡価格は以下の形の差分不等式系で表現可能：

$$p_i - p_j \leq \alpha_{ij}, \qquad \beta_i \leq p_i \leq \gamma_i$$

もしも極小な均衡価格ベクトルが2つ(p, q)存在したら，
下記の命題より，$p \wedge q$ も均衡価格ベクトルであり，
かつ p および q より小さい（矛盾）

命題：p, q が差分不等式系の解であるとき，
ベクトル $p \wedge q, p \vee q$ もまた解である
$p \wedge q$＝各成分が min{p(j),q(j)} のベクトル
$p \vee q$＝各成分が max{p(j),q(j)} のベクトル