定理 5.1：各 $k=0,1,2,\ldots,t$ (t は最大マッチングの枝数) に対し，M_k は最大重み k マッチングである．

Proof. $k=0$ のときは自明．よって，以下の補題 5.2 より明らか．□

枝集合 A,B に対して，

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

と定義する．

補題 5.2：M_{k-1} は最大重み $k-1$ マッチングであるとし，P は（M_{k-1} に関する）増加路の中で重み最大のものとする．このとき，$M_k = M_{k-1} \Delta P$ は最大重み k マッチングである．

Proof. N を最大重み k マッチングとすると，枝集合 $M_{k-1} \Delta N$ には N の枝が M_{k-1} の枝より多く含まれるので，M_{k-1} に関する増加路 P' が必ず含まれる．増加路 P は重みが最大なので，

$$P \text{ の重み} \geq P' \text{の重み}$$

が成り立つ．また，P' は N に対する交互路でもあり，$N' = N \Delta P'$ は枝数 k のマッチングである．ここで N' の重みは

$$w(N') = w(N) - P' \text{の重み}$$

であるが，M_{k-1} が最大重み $k-1$ マッチングなので

$$w(N) - P' \text{の重み} \leq w(M_{k-1})$$

が成り立つ．以上のことから，

$$\begin{aligned} w(M_k) &= w(M_{k-1}) + P \text{ の重み} \\ &\geq (w(N) - P' \text{の重み}) + P' \text{の重み} = w(N) \end{aligned}$$

となり，M_k は最大重み k マッチングである．□

定理 5.3：最大マッチングの枝数を t とする．また，各 $k = 0, 1, 2, \ldots, t$ に対し，最大重み k マッチングの重みを z_k とおく．すると，以下の不等式が成り立つ．

$$z_{k-1} + z_{k+1} \leq 2z_k \qquad (\forall k = 1, 2, \ldots, t-1).$$

Proof. M_{k-1} および M_{k+1} は，それぞれ最大重み $k-1$ マッチングおよび最大重み $k+1$ マッチングとする．枝集合 $M_{k+1} \Delta M_{k-1}$ を考える．この枝集合は，同じ頂点を通らない複数の交互路（交互閉路）に分解可能であるが，M_{k+1} の枝数は，M_{k-1} の枝数より 2 だけ大きいので，増加路が 2 つ以上存在する．そのような増加路を 2 つ任意に選び，P', P'' とおく．すると，枝集合 $N = M_{k+1} \Delta (P' \cup P'')$ は枝数 $k-1$ のマッチングになるので，

$$\begin{aligned}
z_{k-1} &\geq N \text{ の重み} \\
&= M_{k+1} \text{ の重み} - P' \text{ の重み} - P'' \text{ の重み} \\
&= z_{k+1} - P' \text{ の重み} - P'' \text{ の重み}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで「P' の重み」とは，マッチング M_{k-1} に関する P' の重みを表す．P'' についても同様である．

また，マッチング M_{k-1} に関する最大重みの増加路を P^* とおくと，以下が成り立つ．

$$z_k = M_{k-1} \Delta P^* \text{ の重み} = z_{k-1} + P^* \text{ の重み} \quad (\text{補題 } 5.2 \text{ より}).$$

よって，

$$\begin{aligned}
z_{k-1} &\geq z_{k+1} - P' \text{ の重み} - P'' \text{ の重み} \\
&\geq z_{k+1} - P^* \text{ の重み} - P^* \text{ の重み} \\
&= z_{k+1} - 2(z_k - z_{k-1}).
\end{aligned}$$

これを書き換えると，$z_{k+1} + z_{k-1} \leq 2z_k$ を得る．□

定理 5.3 の不等式を書き換えると，$z_{k+1} - z_k \leq z_k - z_{k-1}$ を得る．このことから，z_k の値は k に関して最初は単調増加だが，ある時点から単調減少（非増加）に転じることが分かる．