

数理経済学特講

複数財に対するオークションの 数理とアルゴリズム

第10回 均衡の計算と関数最小化

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

ワルラス均衡の定義

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ 財の集合（各財の在庫は1つのみ）

$B = \{1, 2, \dots, m\}$ 入札者の集合

$v(i, j) \in \mathbb{R}_+$ 入札者 i の 財 j に対する評価額（非負の実数値）

定義： 財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ および財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$
は **ワルラス均衡（競争均衡）**



- 入札者 i に財 j が割り当てられる ($\alpha(i) = j$)
 $\rightarrow 0 \leq v(i, j) - p(j) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}$
- 入札者 i に財の割り当てがない ($\alpha(i) = 0$)
 $\rightarrow \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \leq 0$
- 財 j が誰にも割り当てられない $\rightarrow p(j) = 0$

定義： **均衡配分** = 均衡に現れる配分

均衡価格 = 均衡に現れる価格

最大重みマッチング問題の定式化

- 最大重みマッチング問題を, 整数計画問題として定式化
(E = 二部グラフの枝すべての集合)

最大化 $\sum_{(i,j) \in E} v(i,j) x_{ij}$

条件 $\sum_{k \in N: (i,k) \in E} x_{ik} \leq 1 \quad (\forall i \in B)$
 $\sum_{k \in B: (k,j) \in E} x_{kj} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$
 $x_{ij} \in \{0,1\} \quad (\forall (i,j) \in E)$

この問題の最適解 $\leftrightarrow$ 最大重みマッチング = 均衡割当

線形計画緩和の双対問題

線形計画問題への緩和

最大化 $\sum_{(i,j) \in E} v(i,j) x_{ij}$

条件 $\sum_{k \in N: (i,k) \in E} x_{ik} \leq 1 \quad (\forall i \in B)$
 $\sum_{k \in B: (k,j) \in E} x_{kj} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$
 $x_{ij} \geq 0 \quad (\forall (i,j) \in E)$

その双対問題 (=最大重みマッチングの双対)

最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件 $q(i) + p(j) \geq v(i,j) \quad (\forall (i,j) \in E)$
 $q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B), \quad p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

- 双対問題の最適解における $p(j) \leftrightarrow$ 均衡価格
- $v(i,j)$ 整数のとき, 整数値の最適解 p, q が存在
 $\therefore$ 整数値の均衡価格が存在

双対問題の書き換え

最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件 $q(i) + p(j) \geq v(i, j) \quad (\forall (i, j) \in E)$

$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B), \quad p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

$p(j), q(i)$ は整数

変数 $q(i)$ を消去したい

$q(i)$ は小さくしたい

$\rightarrow q(i) \geq v(i, j) - p(j) \quad (\forall (i, j) \in E), \quad q(i) \geq 0$ なので

$q(i) = \max_{0 \leq j \leq n} \{v(i, j) - p(j)\}$ を満たす最適解が存在

入札者の最大利得の総和

価格の総和

最小化 $\sum_{i \in B} \max_{0 \leq j \leq n} \{v(i, j) - p(j)\} + \sum_{j \in N} p(j)$

条件 $p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

$p(j)$ は整数

この関数最小化の
最適解
= 均衡価格

具体例

$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

最小化 $\max\{0, 3-p(1), 6-p(2), 2-p(3)\}$
+ $\max\{0, 1-p(1), 5-p(2), 4-p(3)\}$
+ $\max\{0, 1-p(1), 3-p(2), 4-p(3)\}$
+ $p(1) + p(2) + p(3)$

条件 $p(1), p(2), p(3) \geq 0$

目的関数値が減少するための条件

目的関数: $\sum_{i \in B} \max_{0 \leq j \leq n} \{v(i, j) - p(j)\} + \sum_{j \in N} p(j)$

命題: 非負ベクトル $(p(1), \dots, p(n))$ に対し,
 Z に含まれる財の価格を1増やしたとき,
 目的関数値が減少 $\iff |Z| < \text{欲しい財が } Z \text{ に含まれる入札者数}$
 $\iff$ ある入札者集合 X が存在して,
 $Z = X$ の入札者が欲しい財全体 かつ $|Z| < |X|$

[証明] 財集合 Z を使って, 価格を変更したとき

- 目的関数 第2項の変化量 = $|Z|$
- 目的関数 第1項の変化量 = $-(Z \text{ の財のみを欲しい入札者の数})$
 - 各入札者 $i \in B$ に対し, 最大利得は **不変 or 1減少**
 - i の最大利得が1減少
 $\iff$ もとの価格において, i の最大利得の財すべて $\subseteq Z$

具体例

$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

初期価格(0,0,0) $\rightarrow$ $p(2)$ を1増やす

$$\begin{aligned}
 &\max\{0, 3-0, \textcolor{red}{6-0}, 2-0\} \\
 &+ \max\{0, 1-0, \textcolor{red}{5-0}, 4-0\} \\
 &+ \max\{0, 1-0, 3-0, \textcolor{red}{4-0}\} \\
 &+ 0 + 0 + 0
 \end{aligned}$$

$p(2)$ が増える $\rightarrow$ **1減少**
(最大利得の財={2}だから)

$p(2)$ が増える $\rightarrow$ 1減少

$p(2)$ が増える $\rightarrow$ 不変
($2 \notin$ 最大利得の財 だから)

2 減少, 1 増加 $\rightarrow$ 目的関数 1 減少

具体例

利得	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	2	4	4

価格(0,1,0) → p(2) を1増やす

$\max\{0, 3-0, 6-1, 2-0\}$

+ $\max\{0, 1-0, 5-1, 4-0\}$

+ $\max\{0, 1-0, 3-1, 4-0\}$

+ 0 + 1 + 0

p(2)が増える → 1 減少

p(2)が増える → 不変
(最大利得の財={2,3}だから)

p(2)が増える → 不変

1 減少, 1 増加 → 合計で ±0

具体例

利得	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	2	4	4

価格(0,1,0) → $p(2)$, $p(3)$ を1増やす

$\max\{0, 3-0, 6-1, 2-0\}$

+ $\max\{0, 1-0, 5-1, 4-0\}$

+ $\max\{0, 1-0, 3-1, 4-0\}$

+ 0 + 1 + 0

$p(2)$ が増える → 1減少

$p(2)$, $p(3)$ が増える → 1減少
(最大利得の財={2,3}だから)

$p(3)$ が増える → 1減少

3 減少, 2増加 → 合計で 1 減少

均衡を厳密に計算するアルゴリズムと関数最小化

均衡を厳密に計算するアルゴリズムの流れ

$B' = \text{最大利得} > 0 \text{ の入札者全員}$

- 価格 $p=(0,0,\dots,0)$ から開始
 - ある $X \subseteq B'$ に対し, X の隣接頂点 Z の数 $< |X|$
 - この条件を満たす X で, 隣接頂点集合 Z が極小なものを選ぶ
 - Z に含まれる財の価格を1ずつ増やす
 - ∴ アルゴリズムの各反復は, 目的関数値を減少させることに対応
 - 関数 $\sum_{i \in B} \max_{0 \leq j \leq n} \{v(i, j) - p(j)\} + \sum_{j \in N} p(j)$ の最小化アルゴリズムとみることができる
- とくに, 改良版のアルゴリズムは,
- 各反復での関数値減少量が最大