

# 数理経済学特講

## 複数財オークションのアルゴリズムと 離散最適化

---

### 第3回

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

[shioura.a.aa@m.titech.ac.jp](mailto:shioura.a.aa@m.titech.ac.jp)

# 最短路の計算

# 最短路長の求め方

- ベルマン・フォードのアルゴリズム(R. Bellman(1958), L. Ford, Jr.(1956))
- 各反復で, 次の値を計算

$d_k(v)$  = 枝数が  $k$  以下の  $s$  から  $v$  への路の中で, 最短なもの長さ

このような路は, 2つのパターンあり

(1) 枝数が  $k-1$  以下  $\Rightarrow d_k(v) = d_{k-1}(v)$

(2)  $s$  からある頂点  $u$  への路(ただし枝数  $\leq k-1$ ) + 枝( $u, v$ )

$$\Rightarrow d_k(v) = d_{k-1}(u) + \ell(u, v)$$



$\therefore$  次の再帰式が成立

$$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u, v) | (u, v) \in E\}]$$

# 負閉路の存在のチェック

再帰式  $d_k(v) = \min[d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u, v) \mid (u, v) \in E\}]$

は  $k=n$  の場合でも成り立つ ( $n=|V|$ )

## 負閉路が存在しない場合

- 各頂点  $v$  への最短路が存在する
- 枝数  $\leq |V|-1$  の最短路が存在 (命題より)
- **全ての  $v$  に対して  $d_n(v) = d_{n-1}(v)$  が成立**

## 負閉路 $C$ が存在する場合

- **ある  $v$  に対して  $d_n(v) < d_{n-1}(v)$  が成立**

(証明) すべての  $v$  に対して等号成立と仮定.

再帰式の定義より

$$d_n(v) = d_{n-1}(v) \leq d_{n-1}(u) + \ell(u, v) \quad (\forall (u, v) \in E)$$

- $d_{n-1}(v)$  はポテンシャル

- 負閉路が存在しない (前のスライドの命題より) (矛盾)

} これを使って  
負閉路を検出

# ベルマン・フォードのアルゴリズム

手順0:  $d_0(s) = 0, d_0(v) = +\infty (\forall v \neq s)$  とおく.  $k=1$  とする.

- $s$  から枝数0でたどり着けるのは  $s$  のみなので

手順1: 各頂点  $v$  に対し, 以下の式で  $d_k(v)$  を計算

$$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v), \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u, v) \mid (u, v) \in E\}]$$

手順2:  $k < |V|$  ならば  $k:=k+1$  とおいて手順1へ戻る.

$k=|V|$  ならば手順3へ.

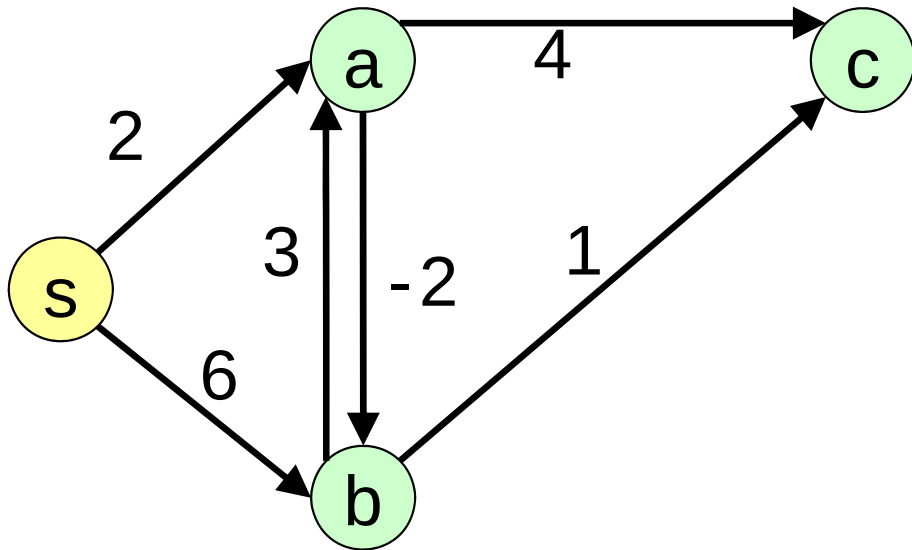
手順3: ある  $v$  に対して  $d_n(v) < d_{n-1}(v)$  が成立  $\rightarrow$  「負閉路存在」

全ての  $v$  に対して  $d_n(v) = d_{n-1}(v)$  が成立

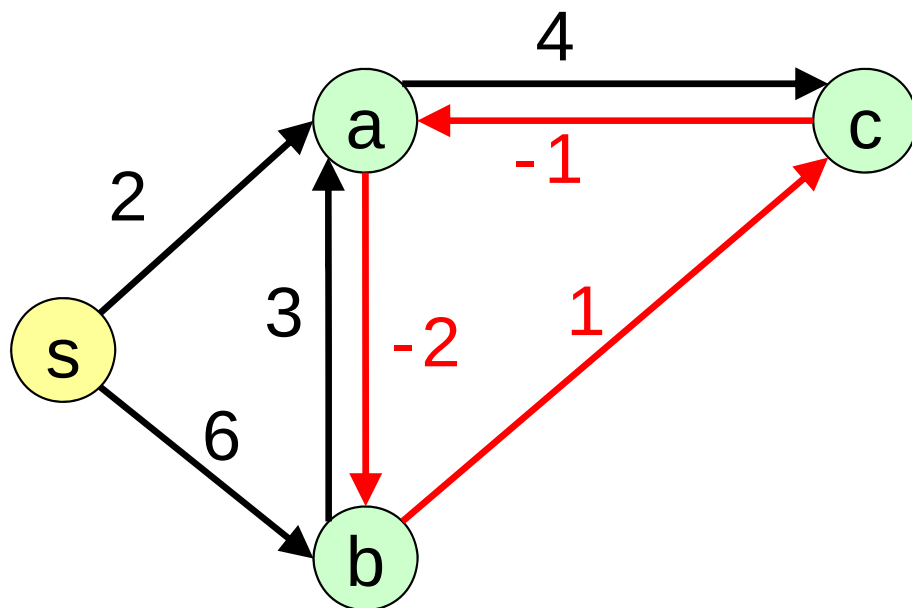
$\rightarrow$  最短路長  $d_{n-1}(v)$  を出力

最短路長だけでなく, 最短路を計算することも  
(若干の修正により) 可能である

# 実行例



|   | k=0      | 1        | 2 | 3 | 4 |
|---|----------|----------|---|---|---|
| s | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 |
| a | $\infty$ | 2        | 2 | 2 | 2 |
| b | $\infty$ | 6        | 0 | 0 | 0 |
| c | $\infty$ | $\infty$ | 6 | 1 | 1 |



|   | k=0      | 1        | 2 | 3 | 4 |
|---|----------|----------|---|---|---|
| s | 0        | 0        | 0 | 0 | 0 |
| a | $\infty$ | 2        | 2 | 2 | 0 |
| b | $\infty$ | 6        | 0 | 0 | 0 |
| c | $\infty$ | $\infty$ | 6 | 1 | 1 |

# 差分不等式系の解の計算

# 差分不等式系の解を求める: ケース1

変数は  $p_1, p_2, \dots, p_n$  と仮定

ケース1: 全ての制約に2つの変数が現れる場合

$$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1,$$

$$p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2,$$

$$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6$$

$$p_1 - p_5 \leq 0, p_2 - p_5 \leq 0,$$

$$p_3 - p_5 \leq 0, p_4 - p_5 \leq 0$$

新しい変数  $p_{n+1}$ ,

自明な不等式  $p_i - p_{n+1} \leq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を追加

このとき,

- $(p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1})$  は新しい不等式系の解

→  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  は元の不等式系の解

- $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  は元の不等式系の解

→  $p_{n+1} = \max_i p_i$  とおくと,

$(p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1})$  は新しい不等式系の解

∴ 新しい不等式系を考えれば十分

# 差分不等式系の解を求める: ケース1

ケース1: 全ての制約に2つの変数が現れる場合

新しい不等式系の解

= 次のグラフのポテンシャル

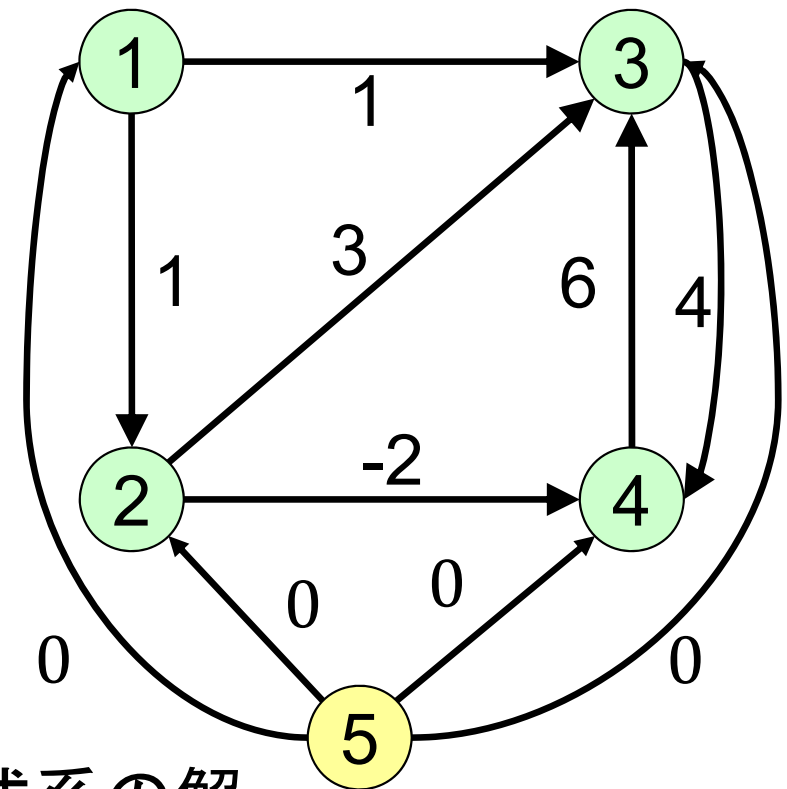
- 各変数に対応する頂点を追加
- 各制約  $p_v - p_u \leq \alpha$  に対し,  
長さ =  $\alpha$  の枝  $(u, v)$  を追加

頂点  $n+1$  から他の頂点へ有向路が存在するので,

負閉路が存在する  $\rightarrow$  解なし

負閉路が存在しない  $\rightarrow$

$n+1$  から  $i$  への最短路長  $d(i)$  は不等式系の解



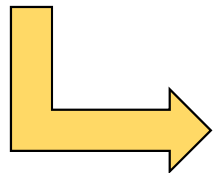
# 差分不等式系の解を求める: ケース2

## ケース2: 一般の場合

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &\leq 1, p_3 - p_1 \leq 1, \\ p_3 - p_2 &\leq 3, p_4 - p_2 \leq -2, \\ p_4 - p_3 &\leq 4, p_3 - p_4 \leq 6, p_1 \leq 0, p_4 \geq 3 \end{aligned}$$

変数1つの不等式を, 変数2つの不等式に変換 → ケース1に帰着

- 新しい変数  $p_{n+1}$  を追加
- 変数1つの不等式を書き換え
  - $p_v \leq \beta$  の形の不等式 →  $p_v - p_{n+1} \leq \beta$  に置き換え
  - $p_v \geq \gamma$  の形の不等式 →  $p_{n+1} - p_v \leq -\gamma$  に置き換え



元の不等式系に解が存在

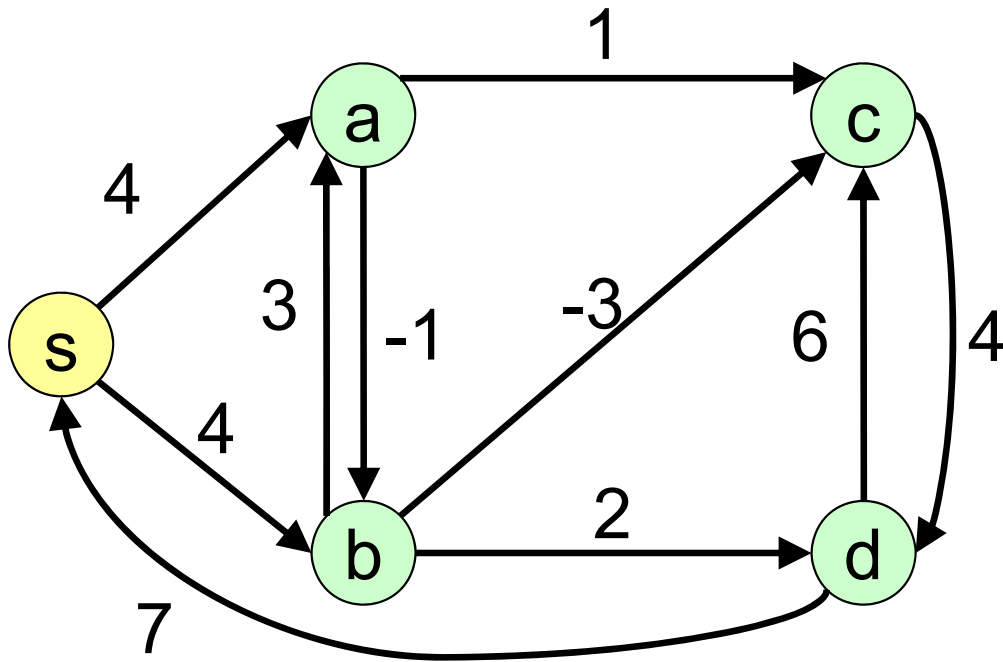
↔ 新しい不等式系に  $p_{n+1} = 0$  なる解が存在

↔ 新しい不等式系に解が存在

要証明

# 演習問題

問1: 下記のグラフにおける,  $s$  から各頂点への最短路長を, ベルマン・フォードのアルゴリズムで計算せよ.



|   | k=0       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|-----------|---|---|---|---|---|
| s | 0         |   |   |   |   |   |
| a | $+\infty$ |   |   |   |   |   |
| b | $+\infty$ |   |   |   |   |   |
| c | $+\infty$ |   |   |   |   |   |
| d | $+\infty$ |   |   |   |   |   |

# 演習問題

問2: 次の不等式系の実行可能解を求めるか,  
または実行可能解をもたないことを示せ.

$$(1) \ p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1, \ p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2, \\ p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6$$

$$(2) \ x_b - x_a \leq -1, x_a - x_b \leq 3, x_c - x_a \leq 1, x_a - x_c \leq 4, \\ x_c - x_b \leq -3, x_d - x_b \leq 2, x_d - x_c \leq 4, x_c - x_d \leq 6$$