

1. 複素数 (complex number) による振動の表現

Euler の公式 $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ ただし $j = \sqrt{-1}$

三角関数での振動の表現 1 $x = a \cos(\omega t + \phi)$

三角関数での振動の表現 2 $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ ここで $a = \sqrt{A^2 + B^2}$

複素数による振動の表現 $\tilde{x} = X e^{j\omega t}$

＊ ただし $X = a e^{j\phi}$ で振幅と位相の情報を含む複素振幅 (complex amplitude)
複素振幅は位相情報も含む.

＊ $\tilde{x}$ は厳密には x と異なるが、実部をとれば x の近似的な表現として考えられる.

☆複素数による振動表現のメリットは微分・積分の取扱いの容易さにある.

$$x = X e^{j\omega t}, \quad \dot{x} = j\omega X e^{j\omega t} = j\omega x, \quad \ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\int x dt = \frac{x}{j\omega}, \quad \iint x dt = \frac{x}{-\omega^2}$$

例> 1 自由度強制振動系の運動方程式

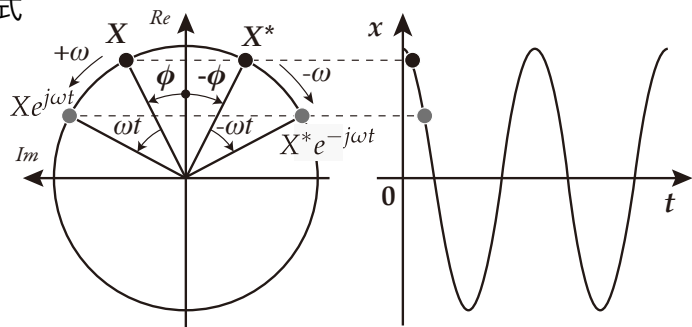
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F e^{j\omega t}$$

$$(-m\omega^2 + jc\omega + k)X e^{j\omega t} = F e^{j\omega t}$$

振動部分 ($e^{j\omega t}$) を消して

$$X = \frac{F}{-m\omega^2 + jc\omega + k}$$

で複素振幅は簡単に求められる.



☆厳密な取扱は共役複素数 (conjugate complex) を用いる. ↑上図

$$x = \frac{X e^{j\omega t} + X^* e^{-j\omega t}}{2}$$

ここで $X = a e^{j\phi} = \alpha + j\beta$ (ただし a, α, β は実数)

$$X \text{ の共役複素数 } X^* = a e^{-j\phi} = \alpha - j\beta$$

虚数部を相殺して、実数軸上の調和振動 (harmonic motion) とするために、逆回転の $-\omega$ が必要 → 複素数で振動を考えると「負の周波数成分」が出てくる

複素数の取り扱いの補足

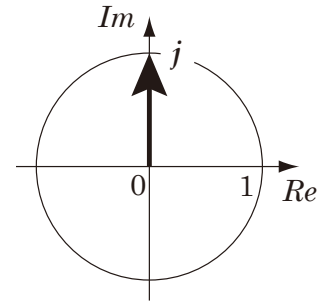
$e^{j\theta}$ をかけることは θ 回転させること

$e^{j\theta}$ で割ることは $-\theta$ 回転させること $X \div e^{j\theta} = Xe^{-j\theta}$

＊任意の複素数 $X = ae^{j\theta}$ をかけることは

- ・ 大きさ a 倍
- ・ 位相は θ 回転

※以後, $a = |X|$ と複素数の大きさ (norm) を表示



j の二乗根は? 1 の三乗根は?

ヒント > 大きさは 1 であるから位相のみ考えれば良い.

複素平面上的の単位円を描いて図形的に考えると良い.

複素数の分数の大きさは分母・分子それぞれ絶対値をとって計算すれば早い.

$$\left| \frac{Y}{X} \right| = \frac{|Y|}{|X|}$$

$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ を複素数で表すと $\sin \omega t = \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ より

$$\tilde{x} = Ae^{j\omega t} + Be^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} = Ae^{j\omega t} - jBe^{j\omega t} = (A - jB)e^{j\omega t} \quad \text{と対応}$$

2. フーリエ級数解析

三角関数の場合

$$x = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t\}$$

$$\text{ただし } \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x dt, \quad A_n = \frac{2}{T} \int_0^T x \cos n\omega t dt, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T x \sin n\omega t dt$$

ここで異なる調和振動成分をかけて周期 T 幅で積分したものは 0 (直交性)

例えば m, n を正の整数として

$$\int_0^T \cos m\omega t \cos n\omega t dt = \frac{1}{2} \int_0^T \{\cos(m+n)\omega t + \cos(m-n)\omega t\} dt$$

右辺が 0 以外となるのは $m=n$ の時だけ.

よって $\cos$ 成分を取り出すためには $\cos$ 成分をかけて積分する.

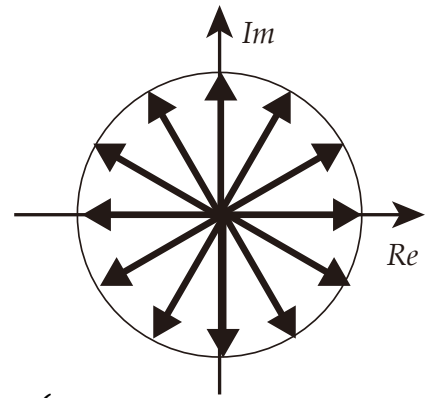
複素数の場合

$$x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega t} \quad \text{※ } n \text{ が } -\infty \text{ からなのに注意}$$

$$\text{ただし } X_n = \frac{1}{T} \int_0^T x e^{-jn\omega t} dt$$

$$m \text{ も整数としたとき } \int_0^T e^{jm\omega t} e^{-jn\omega t} dt = \int_0^T e^{j(m-n)\omega t} dt = \begin{cases} T & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

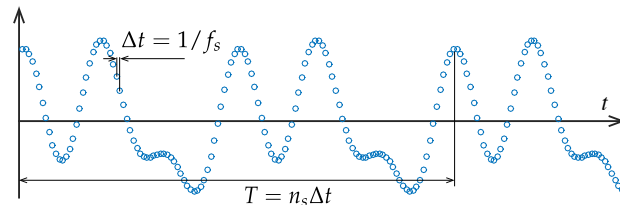
右図のように $m \neq n$ で一周期 (T)，あるいはその整数倍の範囲で $e^{jn\omega t}$ を積分すると全方向に一樣なベクトルの和となるので 0 （直交性）



【離散化】

現実の振動計測およびその周波数解析ではサンプリング周波数 f_s も窓幅 T も有限.

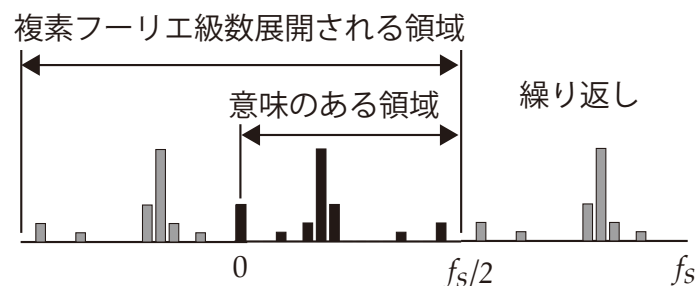
→ 周波数分析結果の最高周波数や周波数分解能を決める.



【負の周波数成分】

虚数部を相殺するために， X_{-n} は X_n の共役複素数である.

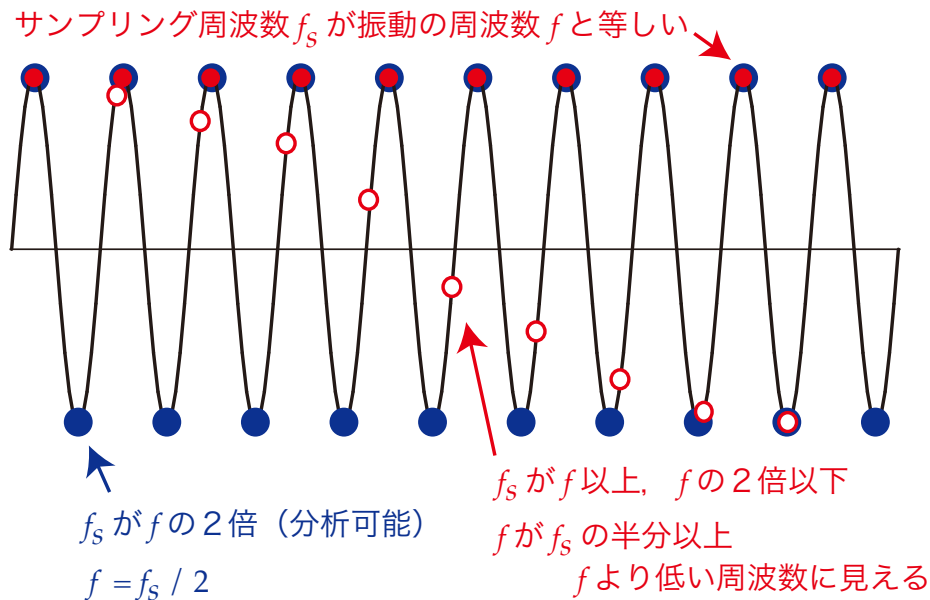
→ 振幅の大きさは $|X_{-n}| = |X_n|$ * 下の f_s はサンプリング周波数



サンプリング定理

サンプリング周波数は測定したい振動の周波数の 2 倍以上必要

※ $0 \sim f_s$ [Hz] で求めたスペクトルの半分は負の周波数のもので意味がない.



現実の離散的なフーリエ変換で、ナイキスト周波数 ($f_s/2$) 以上の振動成分が含まれると間違ったスペクトルとなるので、アンチエイリアシングフィルタで高周波数成分をカットしてから周波数分析を行う。

現実のFFTアナライザは計算速度のため2のべき乗のサンプル点数で周波数分析を行い、1024点がデフォルトになっていることが多い。

この時、 $f_s/2$ に相当するのは512点であるが、フィルタの制約とキリの良い数字という点から0～400点目 (合計401点) の出力を意味のある領域とする。

言い換えれば、1kHzの周波数レンジを分析するためにサンプル点数1024で周波数分析すると、出力の400点目が1kHzであるから、周波数分解能は $1000/400 = 2.5$ [Hz]。

サンプリング周波数は $1000 / 400 \times 1024 = 2,560$ [Hz]。

周波数分析の窓幅は周波数分解能の逆数であるから $1 / 2.5 = 0.4$ [s]。

演習 4/7

1. 前振り>単振動 $x = a \cos(\omega t + \phi)$ が $t=0$ で 初期変位 x_0 , 初速 v_0 であるとしたとき, 実数振幅 a と位相 ϕ を求めよ. という問題と同じ事が複素数でも扱える.

問題>

$$x = \frac{X e^{j\omega t} + X^* e^{-j\omega t}}{2}$$

で X を x_0, v_0, ω を用いて式で示せ.

ヒント> $X = \alpha + j\beta$ において, $t=0$ で $e^{j\omega t} = 1$

2. 下の図は矩形波をフーリエ級数展開したものを20次より高い次数を捨てて時間波形に再度戻したものである. (例えば50次程度まで) 次数を高くするとどのような波形になるかイメージ図を描け.

