2016 年 7 月 8 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 F (MTH.B502) 講義資料 3

前回までの訂正

- 講義ノート 9 ページ，(2.3) 式（ご指摘ありがとうございました）：
$$\varphi(x,y)=\frac{1}{a}\log\frac{\cos ax}{\cos ay}\qquad\Rightarrow\qquad \varphi(x,y)=\frac{1}{a}\log\frac{\cos ay}{\cos ax}$$
- 講義ノート 10 ページ，4 行目：th Scherk surface ⇒ the Scherk surface.
- 講義ノート 10 ページ，最後の行：
$$F(x)=\frac{1}{a}\log\cos ax+c_2\qquad\Rightarrow\qquad F(x)=-\frac{1}{a}\log\cos ax+c_2$$
- 講義ノート 11 ページ，2 行目：
$$F(x)=\frac{1}{a}\log\cos ax\qquad\Rightarrow\qquad F(x)=-\frac{1}{a}\log\cos ax$$
- 講義ノート 11 ページ，3 行目：
$$-\frac{1}{a}\log\cos ay\qquad\Rightarrow\qquad \frac{1}{a}\log\cos ay$$
- 講義ノート 11 ページ，Example 2.4 の 1 行目：$\gamma(u)=(u,a\cosh\frac{u}{a})\Rightarrow\gamma(u)=(a\cosh\frac{u}{a},u)$
- 講義ノート 14 ページ，11 行目：ruled surface an be ⇒ ruled surface can be
- 講義ノート 10 ページの 7 行目：(2.4) reduce to .. について「reduce は他動詞なので文法的に変では」というご指摘がありましたが，ここでは，自動詞の意味で reduce をつかっているつもり．そういうフレーズはあったように思いますが，自信がありません．ちなみに reduces としていないのは (2.4) 式が 2 本の式だから．

授業に関する御意見

- 計算するのがたいへんでした．　**山田のコメント：** そうですよね．スポーツと思うと楽しい（かも）．
- メビウスの帯といい，ハエ取り紙といい，素直に（cos, sin でカンタンに書ける）なパラメータ表示だと，flat さを失ってしまうんでしょうか，と思いました．後，ハエ取り紙見たこと有ります．ハエとりリボンという呼び名は初耳です．　**山田のコメント：** そうですか? `http://www.kiribai.co.jp/advice/list.html?pr=24`

質問と回答

質問： 平行に設置された 2 つの円を張る surface について，catenoid が minimal なのにまっすぐな tube が minimal でないことに納得が行きません．後者をうまく動かせば area を小さくすることができると思うのですが，どうすればよいのでしょうか．

お答え： まず，カテノイド
$$\left(a\cosh\frac{u}{a}\cos v, a\cosh\frac{u}{a}\sin v, u\right)$$
の $-h\leqq u\leqq h$ に対応する部分の面積を計算してごらんなさい．それと同じ枠をはる円柱の面積と比較しましょう．ご質問の文面がよくわからないのですが，円柱を変形して面積を小さくすることができるのなら，円柱は面積最小ではありませんね．

質問： シャボン膜の問題は適当な境界条件で minimal surface equation を解くということでしょうか．

お答え： だいたい，はい．グラフにならないケースもあるので，もう少し言い換える必要がありますが．

質問： 問題の $\sinh x \sinh y = \sin z$ ですが，$\sin z \leqq 1$ なので，$|\sinh x \sinh y| \leqq 1$ となる (x, y, z) が定義域ということで大丈夫ですよね．

お答え： 考えている陰関数表示の定義域は $\mathbb{R}^3$ 全体．ただし曲面の存在する範囲はご質問のような部分．

質問： $K = -1$ かつ $H = 0$ として計算すると $E = G = 1$, $F = L = N = 0$,$M = \pm 1$ となりました．このとき 2 本の接ベクトルは直交しますが，これはこの曲面を多様体とみたとき，その chart が等角写像であるという認識でよいのでしょうか．それとももう少し強い意味があるのでしょうか．

お答え： Chart が等角，という話は今回やりますが，ご質問のケースでは $ds^2 = du^2 + dv^2$ となり，計量から決まるガウス曲率は 0 となりますので，ガウス方程式を満たしません．すなわち，$K = -1$ となる極小曲面は存在しません．

質問： 移動曲面が平面とシャークに限るという定理の証明の中で未知函数 F, G を分離するという操作は，熱方程式は波動方程式を変数分離で解くときの操作と大変似ていると感じました．他にもいろいろなところで行われる操作なのでしょうか．

お答え： はい，しばしばでてきます（使ったことがありますが，具体的にどこか忘れました）．

質問： 私は構造力学はさっぱりなのですが，カテナリーアーチは橋として何が嬉しいのでしょう？ また（単語だけ聞いたことがあるのですが）ラーメン橋などのなどの他の構造力学での物事も幾何学的に面白いことがあるのでしょうか．

お答え： 前半：力学的に安定する（らしい）．後半：あるようです．調べてごらんなさい．

質問： 課題にもテキスト p. 9 (2.2) の minimal surface equation を適用して示すことができるのでしょうか．(2.1) のように $(x, y, \varphi(x, y))$ で表わせず，x，y の部分に $\sinh^{-1}$ を用いたので，そのままあてはまらないのでは，と思いました．

お答え： そうされるなら，座標軸の名前を変えればよいだけですね．たとえばグラフ $x = g(y, z)$ に関して極小曲面の方程式を書くのは簡単ですね．もちろん $z = \sin^{-1}(\sinh x \sinh y)$ とすれば (2.2) が使えます．sin の周期性と対称性から $-\frac{\pi}{2} \leqq z \leqq \frac{\pi}{2}$ で考えれば十分です．$z = \pm\pi/2$ のときは，$z = \varphi(x, y)$ というグラフ表示はもちませんが，それ以外の点が曲面上で稠密で，そこで $H = 0$ ならば，H の連続性から $z = \pm\pi/2$ となる点でも $H = 0$.

質問： minimal surface の例をみつけだすきっかけとかプロセスはどうしているのかなと思いました．

お答え： もともとのきっかけは面積最小の曲面を探すことでしょう．プロセスとしては，前回の例のように常微分方程式に帰着される状況を考えるのがまず第一段階．次回くらいにもう少しハイテクノロジー（ワイエルストラス表現公式）を紹介します．