

## テーマC アクチュエータの制御

### [概説と予習]

#### 目的

アクチュエータとは、電気、油圧、空気圧などからのエネルギーを機械的エネルギーに変換する機器であり、大別して空気圧アクチュエータ、油圧アクチュエータ、ソレノイドおよびモータなどに分類される。アクチュエータは工業プロセスにおける自動制御にとって必要不可欠な要素である。本実験では、小型な直流モータ（DC モータ）とアナログ PID 制御をとりあげ、倒立振り子の制御実験を通じて、制御機能の基本要素であるメカニズム、信号検出及び制御の理解を深める。

#### DC モータの等価回路

DC モータは、磁界の中に置かれるコイルに電流を流すと電磁力が発生し、この電磁力によってコイルが回転する（フレミングの左手の法則）という原理を利用している<sup>1)</sup>。DC モータの主な構成は磁界をつくる界磁（固定子）、モータ本体の中心で回転する回転子と整流子、およびブラシから成っており、図1のような等価回路で表わすことができる<sup>2)</sup>。

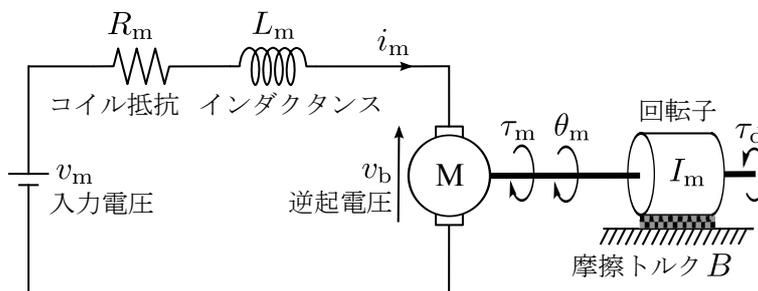


図1 DC モータのモデル<sup>2)</sup>

モータへの入力電圧を  $v_m$ 、電流を  $i_m$ 、回転子の回転角度を  $\theta_m$ 、コイルのインダクタンスを  $L_m$ 、コイルの抵抗を  $R_m$ 、逆起電圧定数を  $k_e$  とすると、回転子の回転によって発生する逆起電圧  $v_b$  は回転子の回転速度に比例し、次式のように表わされる。

$$v_b(t) = k_e \frac{d\theta_m(t)}{dt} \quad (1)$$

図1より、回転子の回路方程式は次式のように表わされる。

$$v_m(t) = L_m \frac{di_m(t)}{dt} + R_m i_m(t) + k_e \frac{d\theta_m(t)}{dt} \quad (2)$$

一方、回転子の慣性モーメントを  $I_m$ 、整流子や軸受などの摩擦トルクを  $B$ 、駆動トルクを  $\tau_d$  とすると、回転子の運動方程式は次式のように表される<sup>2)</sup>。

$$\tau_m(t) = I_m \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + B + \tau_d \quad (3)$$

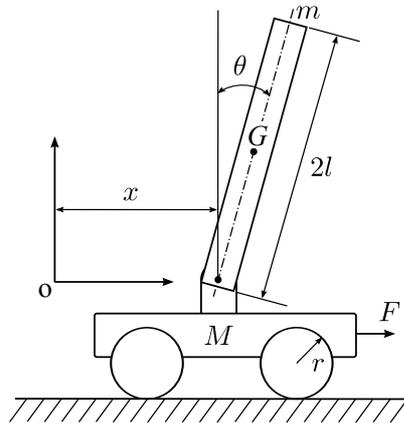
式 (3) の  $\tau_m(t)$  は DC モータのトルクであり，次式のように回転子の電流に比例する． $k_t$  はトルク定数である．

$$\tau_m(t) = k_t i_m(t) \quad (4)$$

式 (2)，(3)，(4) は DC モータの基礎方程式と呼ばれ，メカトロニクス分野では DC モータの数式モデルとして用いられている．また，DC モータのインダクタンス  $L_m$  は微小であるとして無視されることが多い．

## 倒立振り子系の運動方程式

本実験の制御対象である台車型倒立振り子系を図 2 に示す．質量  $M$  の台車の上に，質量  $m$ ，長さ  $2l$  の一様な振り子が回転ヒンジを介して取り付けられている．台車には質量の無視できる半径  $r$  の車輪が 4 つ取り付けられ，その一つは減速ギヤ（ギヤ比  $N$ ）を介して DC モータとつながっている．車輪と床との間，および回転ヒンジの部分に働く粘性摩擦力の係数をそれぞれ  $D_x$ ，および  $D_\theta$  とする．振り子を倒立させるための外力  $F$  は台車の車輪とつながっている DC モータの駆動力によって加えられるとする．



- $M$ : 台車の質量
- $r$ : 台車の車輪の半径
- $G$ : 振り子の質量中心
- $2l$ : 振り子の長さ
- $m$ : 振り子の質量
- $I$ : 振り子の慣性モーメント
- $\theta$ : 振り子の傾き角度
- $x$ : 台車の原点からの変位
- $F$ : 外力

図 2 倒立振り子系

振り子の傾き角度  $\theta$  が微小 ( $\theta \simeq 0$ ) であるとき，振り子と台車の運動方程式は式 (5a)，(5b) のように表わされる．

$$ml \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + (I + ml^2) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + D_\theta \frac{d\theta(t)}{dt} - mgl\theta(t) = 0 \quad (5a)$$

$$(M + m) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + ml \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + D_x \frac{dx(t)}{dt} = F(t) \quad (5b)$$

次に，台車に対する駆動力について考える．まず，台車の車輪の回転角度を  $\theta_w$ ，トルクを  $\tau_w$  とし，ギヤ比を  $N = \theta_m / \theta_w > 1$  とすれば，入出力の仕事の保存原理によって

$$F = \frac{\tau_w}{r} = \frac{\eta N \tau_m}{r}, \quad \dot{\theta}_w = \frac{\dot{\theta}_m}{N} \quad (6)$$

の関係がある．ただし， $\eta$  は減速ギヤのトルク変換率であり，1 より小さい値を持つ．

モータのインダクタンス  $L_m$  は無視できるものとして，式 (2)，(4) と (6) より，台車に対する外力は次式のように得られる．

$$F(t) = \left( \frac{\eta N k_t}{r} \right) \left\{ \frac{v_m(t)}{R_m} - \left( \frac{N k_e}{r R_m} \right) \frac{dx(t)}{dt} \right\} \quad (7)$$

この倒立振り子系に対して制御の可否や安定性等を解析する場合は、式 (5a), (5b) と式 (7) を用いる必要がある。ただし、モータや台車に関する諸係数 ( $\eta, k_e, k_t, R_m, D_x, D_\theta$ ) は実際の制御対象を使って同定実験により求める必要がある。

## 倒立振り子系の伝達関数

制御対象の倒立振り子系に対する入力を外力  $F$ 、出力を振り子の傾き角度  $\theta$  とし、 $x(0) = \dot{x}(0) = \theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$  として式 (5a) と (5b) をラプラス変換すると式 (8a) と (8b) のようになる。

$$m l s^2 X(s) + [(I + m l^2) s^2 + D_\theta s - m g l] \Theta(s) = 0 \quad (8a)$$

$$[(M + m) s^2 + D_x s] X(s) + m l s^2 \Theta(s) = F(s) \quad (8b)$$

式中の  $X(s), \Theta(s), F(s)$  はそれぞれ  $x(t), \theta(t), F(t)$  のラプラス変換である。従って、制御対象の伝達関数  $G_p(s)$  を求めると式 (9) のように得られる。

$$G_p(s) = \frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{m l s^2}{m^2 l^2 s^4 - [(M + m) s^2 + D_x s] [(I + m l^2) s^2 + D_\theta s - m g l]} \quad (9)$$

## フィードバック制御

制御対象の振り子が倒れないように保つためには、振り子の傾き角度を時時刻刻検出し目標値と比較しながら制御する必要がある (すなわちフィードバック制御)。本実験のフィードバック制御系の構成をブロック線図を用いて示すと図 3 のようになる。

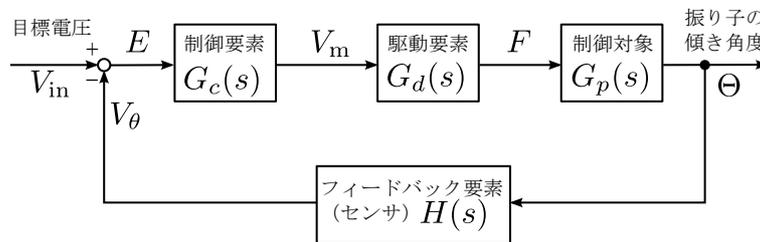


図 3 フィードバック制御系のブロック線図

図から分かるようにフィードバック制御系における信号の流れは閉ループを成している。制御量である振り子の傾き角度  $\theta$  は角度センサ  $H$  により電気信号  $V_\theta$  に変換され、そしてフィードバックされる。フィードバックされた  $V_\theta$  と目標電圧  $V_{in}$  との比較により制御偏差 ( $E = V_{in} - V_\theta$ ) が得られ、制御要素  $G_c$  へ入力される。制御偏差  $E$  は制御要素の作用によって駆動要素 (DC モータ)  $G_d$  への入力電圧  $V_m$  に加工される。さらに、 $V_m$  は駆動要素によって制御対象の駆動力に変換される。

ここで、フィードバック制御系全体の伝達関数  $G(s)$  を求めると式 (10) のようになる。

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{V_{in}(s)} = \frac{G_c G_d G_p}{1 + G_c G_d G_p H} \quad (10)$$

## PID 制御要素

本実験では、図 3 のフィードバック制御系における制御要素に、アナログ演算回路（OP アンプ）で構成される PID 制御要素を用いる。アナログ演算回路は PID 制御器や補償器などを比較的簡単に実装でき、かつ現象の理解が得られやすいというメリットがある。PID 制御要素の基本構成は図 4 のようにブロック線図で表すことができる<sup>3) 4)</sup>。

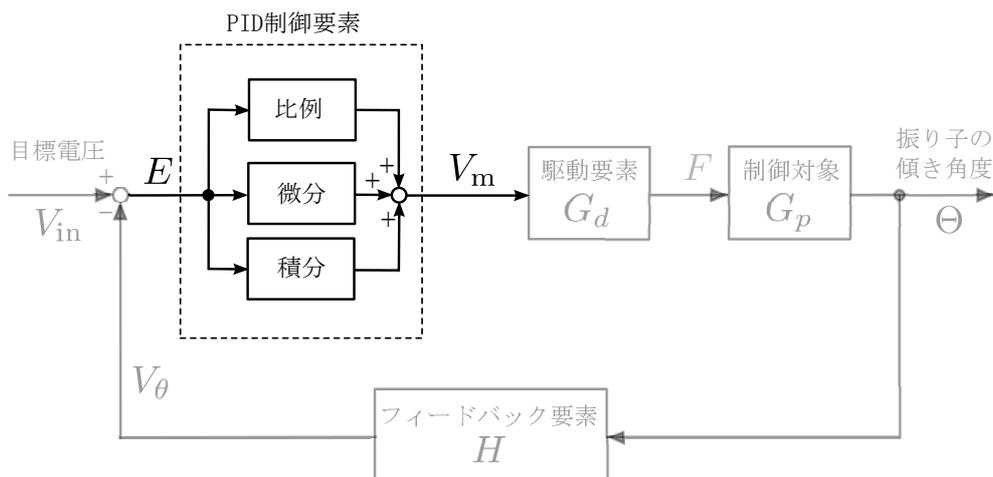


図 4 PID 制御要素の基本構成

図 4 から分かるように、PID 制御には制御偏差に比例した項（Proportional）、制御偏差の積分に比例した項（Integral）、および制御偏差の微分に比例した項（Derivative）が含まれている。PID 制御の名前の由来は上述の各項の頭文字である。図 4 の PID 制御要素における時間領域の入力  $e(t)$  と出力  $v_m(t)$  との関係は次式のように表されている。

$$v_m(t) = K_P \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (11)$$

式 (11) の伝達関数は式 (12) である。

$$G_c(s) = \frac{V_m(s)}{E(s)} = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (12)$$

但し、 $T_I$  は積分時間、 $T_D$  は微分時間と呼ばれる。

## フィードバック要素（角度センサ）

本実験のフィードバック制御系（図 3）におけるフィードバック要素  $H$  には、振り子の傾き角度を検出し電気信号に変換できるセンサーとして低トルク回転型ポテンシオメータが利用されている。図 5 にポテンシオメータの概念図を示す。図から分かるように、ポテンシオメータの軸が回転すると、しゅう動子と抵抗線との接触位置  $P$  が変わり、それにより回転角度に比例して  $P$ - $A$  間および  $P$ - $B$  間の抵抗値の比率が変化するものである。

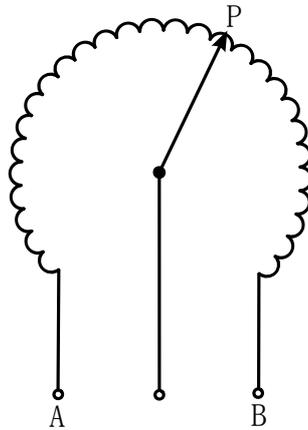


図5 回転型ポテンシオメータの概念図

## アナログ演算回路によるPID制御要素

### 比例要素（ゲイン要素）

アナログ回路による比例要素は、OPアンプの増幅回路を用いて実現することができる。OPアンプの増幅回路には、図6に示しているように、入力信号を増幅と共に極性を反転させて出力する「反転増幅回路」、および入力信号の極性を保ち増幅する「非反転増幅回路」がある。

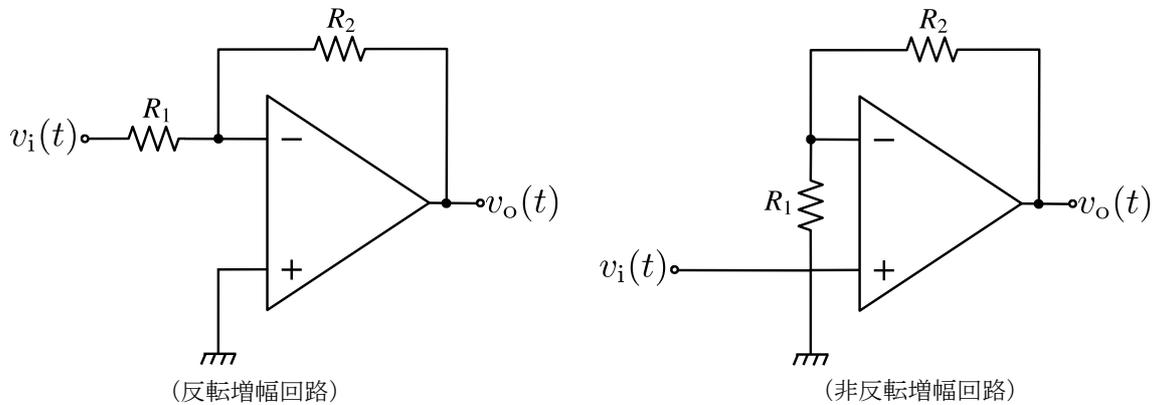


図6 理想OPアンプによる比例要素

理想オペアンプを用いる場合、反転増幅回路および非反転増幅回路における入出力電圧の増幅率（すなわち比例定数  $K_P$ ）は、それぞれ式(13)と(14)のように表すことができる。

$$K_P = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (13)$$

$$K_P = \frac{v_o}{v_i} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \quad (14)$$

### 微分要素

理想 OP アンプによる微分要素は、図 6 の反転増幅回路の  $R_1$  をコンデンサに置き換えることによって構成できる。図 7 に回路図を示す。

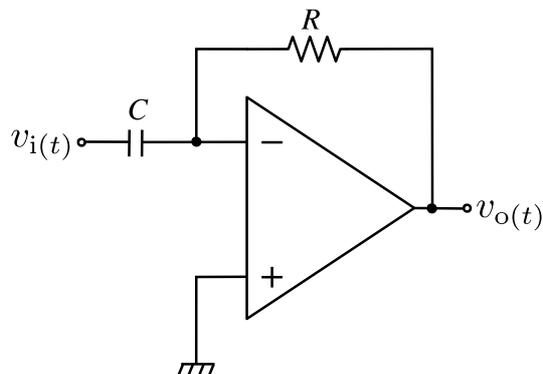


図 7 理想 OP アンプによる微分要素

ここで、コンデンサ  $C$  のインピーダンス ( $Z = 1/j\omega C$ ) を用いれば、時間領域における入出力信号間の関係は次式のように得られる。ただし、 $\omega$  は角周波数である。

$$G = \frac{v_o(t)}{v_i(t)} = -j\omega RC \quad (15)$$

式 (15) の伝達関数は次式のように表される。

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -sRC \quad (16)$$

### 積分要素

理想 OP アンプによる積分要素は図 8 に示す。積分要素は前節の微分要素の  $R$  と  $C$  の位置を逆にして得られる。

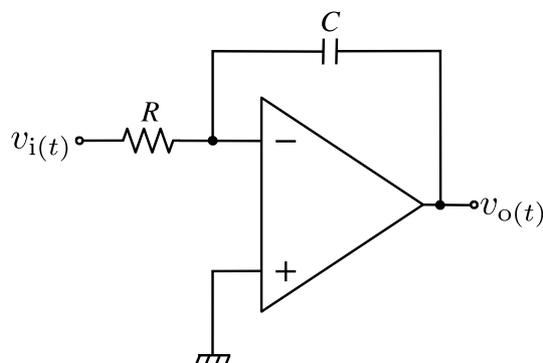


図 8 理想 OP アンプによる積分要素

図 8 の積分要素の伝達関数は次式のように表される.

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{1}{sRC} \quad (17)$$

### 加算回路

前述の比例要素, 微分要素および積分要素のそれぞれの出力信号は, 次段の駆動要素へ入力する前に, 加算して一つの信号にする必要がある. この役割を担ってくれるのは OP アンプ加算回路である. 図 9 に反転型加算回路を示す. なお, 前述の比例要素, 微分要素および積分要素はそれぞれ反転型回路を利用しているため, 信号の加算の段階で再び信号の極性を反転させ元に戻している.

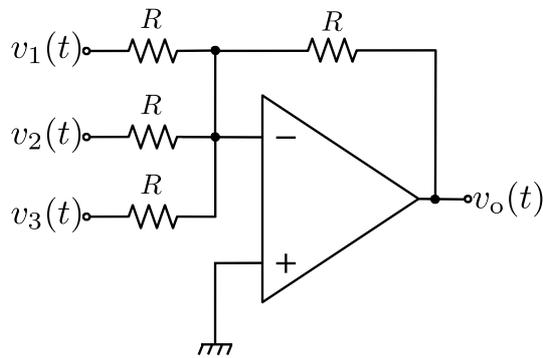


図 9 理想 OP アンプによる加算回路

図 9 の反転型加算回路の入出力間の関係は次式のように表される.

$$v_o = -(v_1 + v_2 + v_3) \quad (18)$$

### ボード線図

自動制御の分野において, 制御系の安定性などを判定する有効な手段の一つとしてボード線図が利用されている. ボード線図とは, 複素関数で表わされている制御系の伝達関数  $G(j\omega)$  のゲイン  $|G(j\omega)|$  と位相  $\angle G(j\omega)$  を同時にプロットした図のことである. 制御系における信号は直流成分から非常に高い周波数領域まで連続分布しているため, 横軸の周波数は対数尺にして表すことが一般的である. なお, 縦軸のゲインも広範囲に渡り変化するので, 式 (19) の定義により対数をとってデシベル [dB] で表している<sup>5)</sup>.

$$|G(j\omega)| = 20 \log |G(j\omega)| \quad [\text{dB}] \quad (19)$$

### [前試問]

1. アクチュエータの代表的な種類及び使用例を述べなさい.
2. 図 2 の制御対象に対して以下の仮定をおく. ヒンジ部分および車輪と床間に粘性摩擦がなく ( $D_x = D_\theta = 0$ ), 振り子の慣性モーメントを  $I = ml^2/3$  とする. 台車の速度はモータの入力電圧  $v_m$  を用いて指定でき, すなわち  $v_m$  に比例する外力  $F$  が台車に加わるとする. また, 振り子の傾き角度  $\theta$  に比例す

る電圧  $v_\theta$  が角度センサによって検出できるとする。以下の問いについて考察しなさい。

ア) 図 3 のフィードバック制御系において P 制御 (比例制御) ( $V_m = K_P E$ ) を適用した場合、振り子を倒立させることができるか。

イ) 図 3 のフィードバック制御系において P I D 制御 ( $V_m = K_P(1 + T_D s + 1/T_I s)E$ ) を適用した場合、振り子を倒立させることができるか。

3. PID 制御においてなぜ比例動作、微分動作、及び積分動作を利用するのか、それぞれの働きについて答えなさい。

## [実験]

[微分要素と積分要素の波形観測]

1. 用意された OP アンプ、抵抗とコンデンサを使って、ブレードボード上に微分回路と積分回路を実装する。(電気部品の規格や計測器の操作などに関する詳細な実験手順は実験当日の説明と配布資料を参照する)
2. 配線が終わったらいきなり電源をつなぐず、短絡や誤り配線を必ず確認する。
3. 配線確認後、ファンクションジェネレータよりサイン波、三角波、矩形波の信号を選択して入力する。
4. ファンクションジェネレータで信号の周波数を徐々に変え、オシロスコープで各回路の入出力信号の波形を観測する。
5. 微分や積分の振る舞いは理論通りであるか各回路の伝達関数とパラメータより求めたボード線図に観測値をプロットして確認する。

[倒立振り子の実験]

1. はじめに、フィードバック制御系に対して比例制御のみを適用し、台車が振動し始めるところまで、比例ゲインを調整する。
2. 次に、微分制御を加え (P D 制御)、台車の振動が抑制されるように微分要素のパラメータを調整する。
3. さらに、積分制御を加え (P I D 制御)、振り子が倒立するように積分要素のパラメータ調整をする。
4. 振り子を直立制御できたとき、各パラメータを計測するとともに、振り子の振れかたをオシロスコープを用いてキャプチャする。

## [後試問]

1. 記録した PID パラメータとオシロスコープの波形を提示しなさい。
2. PID パラメータを用いて倒立振り子制御の安定性について考察しなさい。
3. 本実験では、振り子の傾き角度のみを観測しそれに応じて DC モータの入力電圧を制御した。この制御対象に対してより安定的な制御を実現するためにはどのような改善策が考えられるか考察しなさい。

## 参考文献

- 1) 鷹野英司, 加藤光文, アクチュエータの技術, 理工学社, 1999.
- 2) 小野京右, メカトロニクス時代の機械力学, 培風館, 2005.
- 3) 山本重彦, 加藤尚武, PID 制御の基礎と応用, 朝倉書店, 2005.
- 4) 森泰親, 演習で学ぶ PID 制御, 森北出版株式会社, 2009.
- 5) 森政弘, 小川鑛一, 初めて学ぶ基礎制御工学, 東京電機大学出版局, 2001.