演習課題 –PDE 移流方程式の差分解法–

【目的】

1 次元移流方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=0\,.$$

を①風上 1 次差分法，②Leith 法，③CIP 法のそれぞれで計算するプログラムを完成させ，計算結果を比較する。計算の条件は以下の通りとする。

【計算条件】

(速度) u =1 [m/s]

(計算する時間) $0 < t < 700$ [s]

(時間の刻み幅) Δt=0.1 [s]

(計算格子点) 等間隔 Δx=1

(計算領域) $0 < x < 1{,}000$ [m]

(境界条件) ノイマン条件 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=1000}=0$

(初期条件) ガウス分布

$$f_i^0=f(t=0,x_i)=\exp\left(-\frac{(x_i-50)^2}{15^2}\right)$$

※ 以上の条件の場合の解析解 $f_{Theory}(t_n,x_i)$ は以下のようになる。

$$f_{Theory}(t_n,x_i)=\exp\left(-\frac{(x_i-u\times t_n-50)^2}{15^2}\right)$$

これと計算結果を比較せよ。

※①～③の各種法についてプログラムを完成させ，時刻 t=100[s], 300[s], 500[s], 700[s]についてグラフを描き，解析解と比較しつつ計算手法の持つ誤差の程度等について考察しなさい。

【課題①：風上１次差分】

***u*>0** の場合の風上１次差分による計算式は以下のようになる。

<u>左端（$i=1$）：</u> $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0}=0$ → $f_0=f_1$ だから

$$f_1^{n+1}=f_1^n-\frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(f_1^n-f_0^n\right)=f_1^n$$

$$\therefore f_1^{n+1}=f_1^n$$

<u>それ以外（$i\neq 1$）：</u> $f_i^{n+1}=f_i^n-\dfrac{u\Delta t}{\Delta x}\left(f_i^n-f_{i-1}^n\right)$

【課題②：Leith 法】

Leith 法による計算式は以下のようになる（Leith 法では，i 点の計算に，i-1, i+1 の左右点を用いるので，境界条件は i=1 と i=1000 の両端で考慮する必要がある点に注意する）。

<u>左端（i =1）：</u>

$$a = \frac{1}{2\Delta x^2}\left(f_2^n - 2f_1^n + f_1^n\right)$$

$$b = \frac{1}{2\Delta x}\left(f_2^n - f_1^n\right)$$

$$x_p = -u\Delta t$$

として、

$$f_1^{n+1} = a \times x_p^2 + b \times x_p + f_1^n$$

<u>右端（i =1000）：</u>

$$a = \frac{1}{2\Delta x^2}\left(f_{1000}^n - 2f_{1000}^n + f_{999}^n\right)$$

$$b = \frac{1}{2\Delta x}\left(f_{1000}^n - f_{999}^n\right)$$

$$x_p = -u\Delta t$$

として、

$$f_{1000}^{n+1} = a \times x_p^2 + b \times x_p + f_{1000}^n$$

<u>境界以外（$1 < i < 1000$）：</u>

$$a = \frac{1}{2\Delta x^2}\left(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n\right)$$

$$b = \frac{1}{2\Delta x}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right)$$

$$x_p = -u\Delta t$$

として、

$$f_i^{n+1} = a \times x_p^2 + b \times x_p + f_i^n$$

【課題③：CIP 法】

CIP 法では f_i^n に加え，その空間微分 $g_i^n = (\partial f / \partial x)_i^n$ を格子点上に配置し， f_i^n と g_i^n の両方について，時間発展を計算する。そのためプログラム中では g_i^n のための配列を f_i^n と同様に確保する。また，初期条件 g_i^0 も f_i^0 と同時に設定する必要がある。実際の初期条件は以下の様に与えれば良い。

（g_i^0 の初期条件）　　ガウス分布 f_i^0 をxで微分して（$g_i^0 = \frac{\partial}{\partial x} f_i^0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\exp\left(-\frac{(x_i - 50)^2}{15^2}\right)\right]$），

$$\therefore g_i^0 = -\frac{2(x_i - 50)}{15^2}\exp\left(-\frac{(x_i - 50)^2}{15^2}\right)$$

また，（f_i^n，g_i^n）から（f_i^{n+1}，g_i^{n+1}）を計算する式は，<u>u>0 の場合</u>，以下のようになる。

<u>左端（i =1）：</u>

境界条件: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$ より $f_0 = f_1$。また， $g_1^n = (\partial f / \partial x)_1^n$ だから $g_1^n \cong 0$ と考える。

$$a = \frac{2}{\Delta x^3}\left(f_1^n - f_1^n\right) + \frac{1}{\Delta x^2}\left(g_1^n + g_1^n\right) = \frac{2}{\Delta x^3}(0) + \frac{1}{\Delta x^2}(0+0) = 0$$

$$b = -\frac{3}{\Delta x^2}\left(f_1^n - f_1^n\right) + \frac{1}{\Delta x}\left(2g_1^n + g_1^n\right) = -\frac{3}{\Delta x^2}(0) + \frac{1}{\Delta x}(0+0) = 0$$

よって $x_p = -u\Delta t$，として

$$f_1^{n+1} = f_1^n$$
$$g_1^{n+1} = 0$$

<u>それ以外（$i \neq 1$）：</u>

$$a = \frac{2}{\Delta x^3}\left(f_{i-1}^n - f_i^n\right) + \frac{1}{\Delta x^2}\left(g_i^n + g_{i-1}^n\right)$$

$$b = -\frac{3}{\Delta x^2}\left(f_i^n - f_{i-1}^n\right) + \frac{1}{\Delta x}\left(2g_i^n + g_{i-1}^n\right)$$

$$x_p = -u\Delta t$$

として、

$$f_i^{n+1} = a \times x_p^3 + b \times x_p^2 + g_i^n x_p + f_i^n$$
$$g_i^{n+1} = 3a \times x_p^2 + 2b \times x_p + g_i^n$$