§4 双曲型偏微分方程式の厳密解
Theoretical Solution of Hyperbolic PDE

§4.1 今回の講義の目的

- 双曲型偏微分方程式の解析的な解の求め方について学ぶ

§4.2 移流方程式（双曲系方程式）のダランベール解法

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

§4.3 波動方程式へのダランベール解法の適用

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

§4.4 波動方程式のFourier級数を用いた解法 （次回の講義）

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad + \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

§4.2 移流方程式のダランベール解法
D'Alembert's Solution of the Advection Equation

§4.2 移流方程式のダランベール解法

- 一定の流速 ($u = const.$)による物質輸送 ： 移流方程式（双曲系方程式）

1次元移流方程式： $$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad (4.2\text{-}1)$$

解は時刻t, 空間座標xの関数: $f = f(t,x)$

- 移流方程式(双曲系方程式）の数学的特徴：

適切な [　　] により，一変数の微分のみを含む形にできる.

変数変換: $(t,x) \to (\tau,\xi)$ $$\begin{cases} x = a\xi + b\tau \\ t = c\xi + d\tau \end{cases} \quad = \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{d}{ad-bc}x - \dfrac{b}{ad-bc}t \\ \tau = -\dfrac{c}{ad-bc}x + \dfrac{a}{ad-bc}t \end{cases}$$

§4.2 移流方程式のダランベール解法

- 微分の合成則(Chain rule)

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_x\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_\xi+\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_x\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\tau=\frac{a}{ad-bc}\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_\xi-\frac{b}{ad-bc}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\tau$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)_t\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_\xi+\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_t\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\tau=-\frac{c}{ad-bc}\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_\xi+\frac{d}{ad-bc}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\tau$$

- 移流方程式(4.2-1)に代入

$$\left\{\frac{a}{ad-bc}\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_\xi-\frac{b}{ad-bc}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\tau\right\}+u\left\{-\frac{c}{ad-bc}\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_\xi+\frac{d}{ad-bc}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\tau\right\}=0$$

- $ad-bc\neq 0$ と仮定して整理すると

$$(a-uc)\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_\xi+(-b+ud)\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\tau=0 \qquad (4.2\text{-}2)$$

§4.2 移流方程式のダランベール解法

$$(a-uc)\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_{\xi}+(-b+ud)\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_{\tau}=0 \quad (4.2\text{-}2)$$

- 片方の微分 $\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_{\tau}$ を消すには, $\boxed{}$ とすればよい.

そのほかの係数はできるだけ簡単な $a=1, c=0, d=1$ の値とすれば,
式(4,2-2), つまり移流方程式は次のように書き換えられることになる.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_{\xi}=0 \quad (4.2\text{-}3)$$

- 積分すると

$$\boxed{} \quad (4.2\text{-}4)$$

積分定数 Cは τ 以外(ξ)の関数

§4.2 移流方程式のダランベール解法

- $a=1, b=u, c=0, d=1$ とする変数変換は,

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{d}{ad-bc}x - \dfrac{b}{ad-bc}t \\ \tau = -\dfrac{c}{ad-bc}x + \dfrac{a}{ad-bc}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{} \\ \boxed{} \end{cases} \qquad (4.2\text{-}4)$$

- 今, 初期時刻($t=0$)における f が

$$f(0,x) = F(x)$$

で与えられるとすると, $t=0$ における ξ は $\xi = x - u \times 0 = x$ だから

$$(4.2\text{-}4)\ f(t,x) = C(\xi) \Rightarrow f(0,x) = C(x) = F(x)$$

$$\therefore C(\xi) = F(\xi) = f(0,\xi) = f(0, x-ut) \qquad (4.2\text{-}5)$$

§4.2 移流方程式のダランベール解法

- (4.2-5)&(4.2-4)から，移流方程式の解は以下のように表されることがわかる．

(4.2-6)

- 検算

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}f(0,x-ut)=\frac{\partial(-ut)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}f(0,x-ut)=-u\frac{\partial}{\partial x}f(0,x-ut)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)=\frac{\partial}{\partial x}f(0,x-ut)$$

代入

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}+u\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}=0 \Rightarrow \underbrace{-u\frac{\partial}{\partial x}f(0,x-ut)+u\frac{\partial}{\partial x}f(0,x-ut)}_{\to 0\ :\mathrm{OK!}}=0$$

§4.2 移流方程式のダランベール解法

- まとめ

1次元移流方程式（双曲系方程式）: $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial t} + u\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x} = 0$

流速 u が定数の場合: $u = const.$

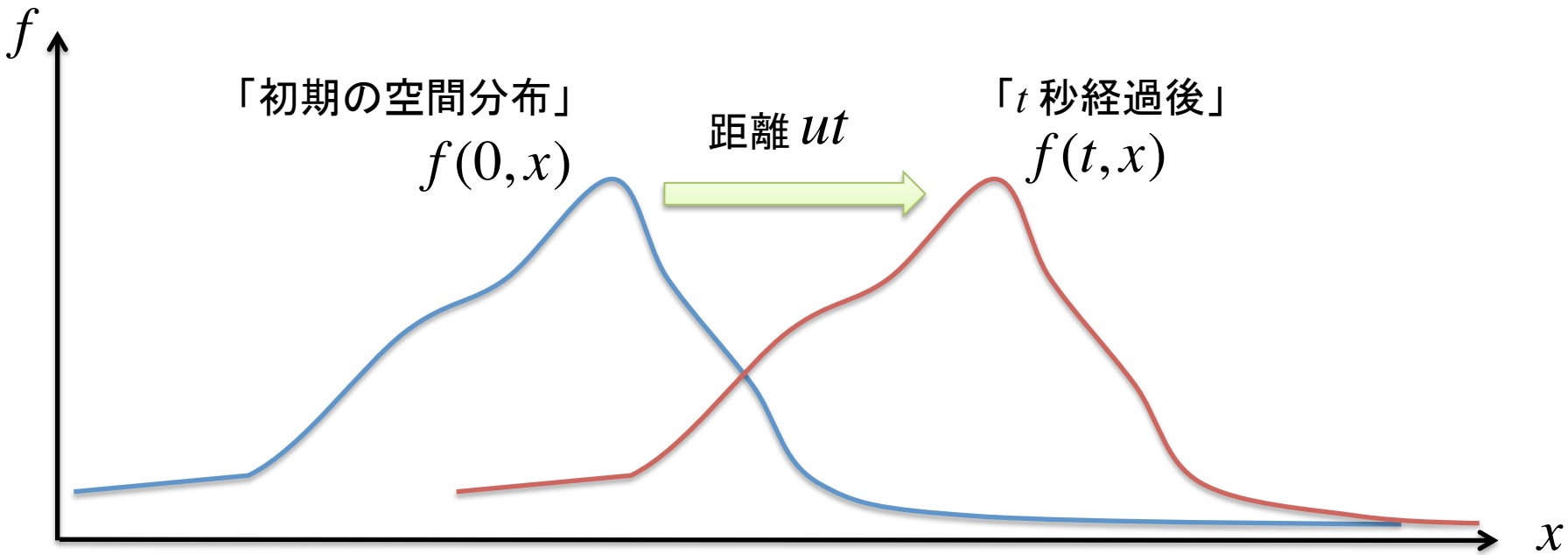
解析解は初期分布を平行移動したもの: $f(t,x) = f(0, x - ut)$

§4.2 移流方程式のダランベール解法

➢ ダランベールの解の物理的意味

$$f(t,x) = f(0,x-ut) \qquad (4.2\text{-}6)$$

「t 秒経過後の空間分布」 ≡ 「初期の空間分布 $f(0,x)$ をx方向に ut だけ平行移動した分布」



u は流体の速度（流速）であるから，流れによる輸送の状況とダランベール解は一致する

§4.3 波動方程式へのダランベール解法の適用
Application of D'Alembert's Solution to the Wave equation

§4.3 波動方程式のダランベール解法

- 1次元波動方程式: $$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad (4.3\text{-}1)$$

- 未知関数 $g(t, x)$を導入すれば二組の双曲系方程式となる.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + c\dfrac{\partial f}{\partial x} = g & (4.3\text{-}2) \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} - c\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 & (4.3\text{-}3) \end{cases}$$

- (4.3-3)の解は§4.2の結果を用いて ($u = -c$ とみなして)

$$\boxed{} \qquad (4.3\text{-}4)$$

§4.3 波動方程式のダランベール解法

- (4.3-2)は非同次方程式

$$\text{(4.3-2)}\quad \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_x + c\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t = g(t,x)$$

- §4.2の解法を参考に，変数変換

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \tau = t \end{cases} \quad \text{(4.3-5)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = \xi + c\tau \\ t = \tau \end{cases} \quad \text{(4.3-5')}$$

を行うことにすれば，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_x \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_\xi + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_x \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\tau = \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_\xi - c\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\tau$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)_t \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_\xi + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_t \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\tau = 0 + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\tau$$

を(4.3-2)に代入して

§4.3 波動方程式のダランベール解法

(4.3-2) $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_x + c\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t = g(t,x)$ ⇒ $\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_\xi - c\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\tau + c\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_\tau = g(t,x)$

$$\therefore \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_\xi = g(t,x) = g(\tau, \xi + c\tau) \qquad (4.3\text{-}6)$$

$$\begin{cases} x = \xi + c\tau \\ t = \tau \end{cases} \qquad (4.3\text{-}5')$$

- τで(4.3-6)を積分

$$f(t,x) = C(\xi) + \int_0^\tau g(\tau', \xi + c\tau')\,d\tau' \qquad (4.3\text{-}7)$$

- (4.3-4) $g(t,x) = g(0, x+ct)$ から

$$g(\tau', \xi + c\tau') = g(0, (\xi + c\tau') + c\tau') = g(0, \xi + 2c\tau') \qquad (4.3\text{-}8)$$

§4.3 波動方程式のダランベール解法

- (4.3-7)に代入して

$$
\begin{aligned}
f(t,x) &= C(\xi) + \int_0^{\tau} g(\tau', \xi + c\tau')\, d\tau' \\
&= C(\xi) + \int_0^{\tau} g(0, \xi + 2c\tau')\, d\tau' \\
&= C(\xi) + \frac{1}{2c} \int_{\xi}^{\xi+2c\tau} g(0,s)\, ds \\
&= C(x-ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(0,s)\, ds
\end{aligned}
$$

$$s = \xi + 2c\tau'$$

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \tau = t \end{cases} \qquad (4.3\text{-}5)$$

$$\therefore f(t,x) = C(x-ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(0,s)\, ds \qquad (4.3\text{-}9)$$

§4.3 波動方程式のダランベール解法

- $t=0$の初期分布が $f(0,x)$ で与えられるとすれば

$$f(0,x)=C\left(x-c\times 0\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-c\times 0}^{x+c\times 0} g(0,s)\,ds=C\left(x\right)+0$$

$$\therefore C\left(x\right)=f(0,x) \quad \Rightarrow \quad \therefore C\left(x-ct\right)=f(0,x-ct) \qquad (4.3\text{-}10)$$

- (4.3-9)に代入して

$$\therefore f(t,x)=f(0,x-ct)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(0,s)\,ds \qquad (4.3\text{-}11)$$

- (4.3-2) $\frac{\partial}{\partial t}f\left(t,x\right)+c\frac{\partial}{\partial x}f\left(t,x\right)=g\left(t,x\right)$ を代入すると

$$\therefore f(t,x)=f(0,x-ct)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\left\{\frac{\partial}{\partial t}f\left(0,s\right)+c\frac{\partial}{\partial x}f\left(0,s\right)\right\}ds \qquad (4.3\text{-}12)$$

§4.3 波動方程式のダランベール解法

$$f(t,x) = f(0,x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\left\{\frac{\partial}{\partial t}f\left(0,s\right) + c\frac{\partial}{\partial x}f\left(0,s\right)\right\}ds \qquad (4.3\text{-}12)$$

$$= f(0,x-ct) + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct}\left\{\frac{\partial}{\partial x}f\left(0,s\right)\right\}ds + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\left\{\frac{\partial}{\partial t}f\left(0,s\right)\right\}ds$$

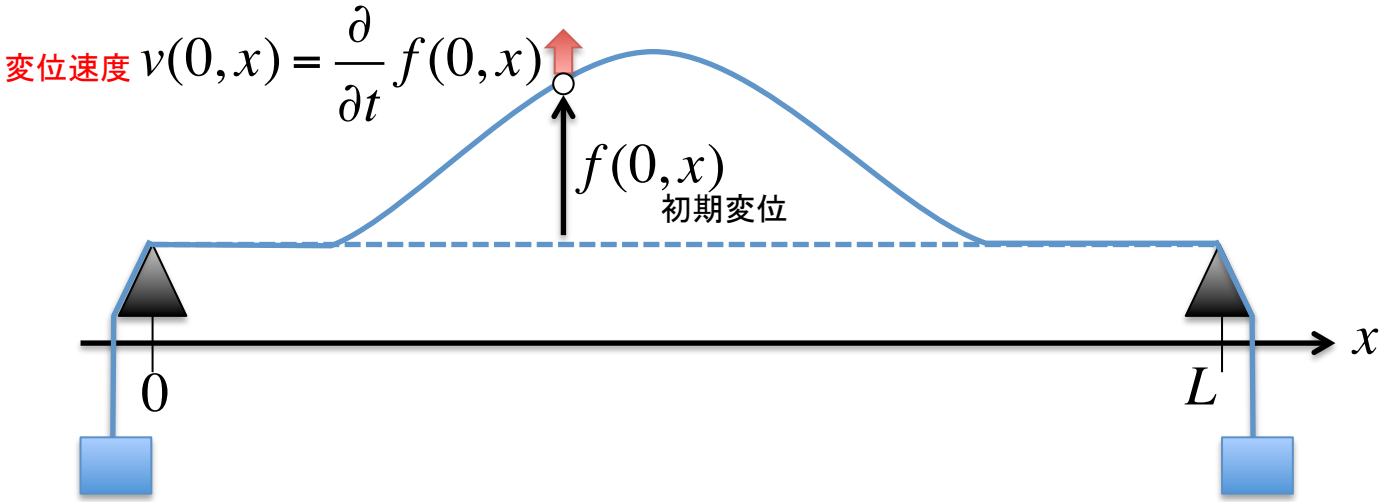
$$= f(0,x-ct) + \frac{1}{2}\left[f\left(0,s\right)\right]_{s=x-ct}^{s=x+ct} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\left\{\frac{\partial}{\partial t}f\left(0,s\right)\right\}ds$$

$$= \frac{1}{2}\left\{f(0,x+ct) + f(0,x-ct)\right\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\left\{\frac{\partial}{\partial t}f\left(0,s\right)\right\}ds$$

§4.3 波動方程式のダランベール解法

➢ 関数 $g(0,s)$ の形を決定するには，t=0における初期条件として

初期変位 $f(0,x)$ に加え，もうひとつ必要となる．



$v(0,x)=\frac{\partial}{\partial t}f(0,x)$	時刻t=0秒での座標xにおける弦の変位速度

§4.3 波動方程式のダランベール解法

$$f(t,x)=\frac{1}{2}\left\{f(0,x+ct)+f(0,x-ct)\right\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\underline{\left\{\frac{\partial}{\partial t}f\left(0,s\right)\right\}}ds$$

$$\therefore f(t,x)=\frac{1}{2}\left\{f(0,x+ct)+f(0,x-ct)\right\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}v(0,s)\,ds \qquad (4.3\text{-}13)$$

§4.3 波動方程式のダランベール解法

<u>まとめ</u>

- １次元波動方程式: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

- 初期条件:

  初期変位 $f(0,x)$　　初期変位速度 $v(0,x) = \dfrac{\partial}{\partial t} f\left(0,x\right)$

- 解析解:

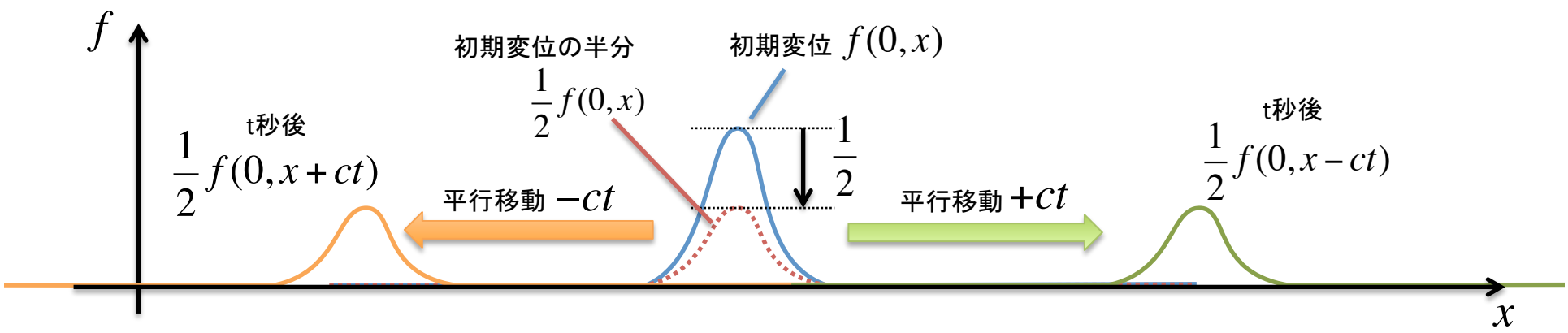
$$f(t,x) = \frac{1}{2}\left\{f(0,x+ct) + f(0,x-ct)\right\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v(0,s)\,ds$$

§4.3 波動方程式のダランベール解法

- $f(t,x)=\frac{1}{2}\{f(0,x+ct)+f(0,x-ct)\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v(0,s)\,ds$ の物理的意味合い

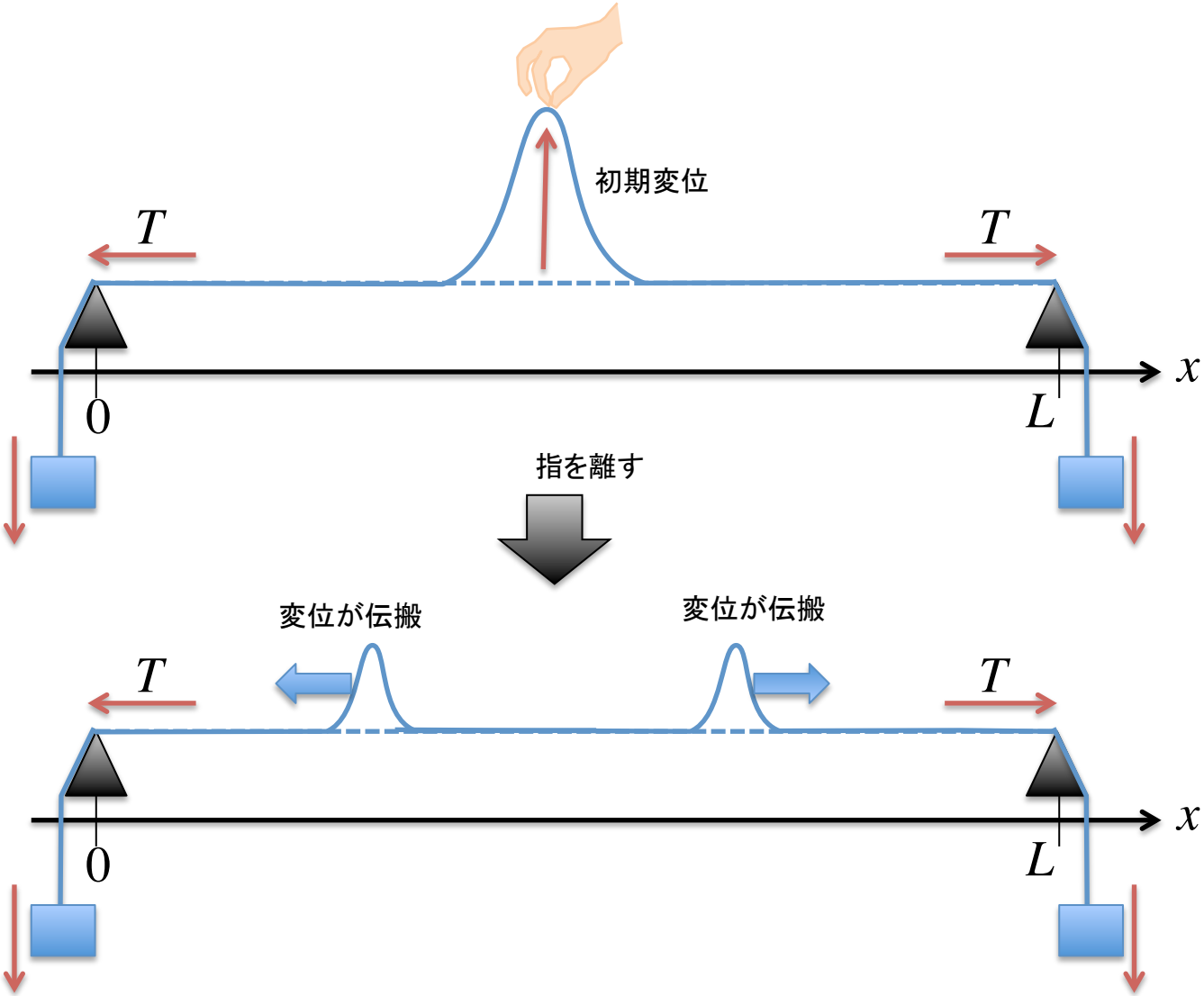
- 最初弦は静止していたとすると$(v(0,x)=0)$

解析解： $f(t,x)=\underbrace{\frac{1}{2}f(0,x+ct)}_{\mathrm{L}}+\underbrace{\frac{1}{2}f(0,x-ct)}_{\mathrm{R}}$



Lの項は，左向きに速度”－c ”で初期変位の半分が伝搬していく波
Rの項は，右向きに速度”＋c”で初期変位の半分が伝搬していく波

§4.3 波動方程式のダランベール解法



弦で波が伝わる現象とダランベールの解析解は一致している

演習

１次元波動方程式 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

Q1: 初期条件　変位: $f(0,x) = e^{-x^2}$　変位速度: $v(0,x) = \dfrac{\partial}{\partial t} f(0,x) = 0$

Q2: 初期条件　変位: $f(0,x) = e^{-x^2}$　変位速度: $v(0,x) = \dfrac{\partial}{\partial t} f(0,x) = 2cxe^{-x^2}$

Q1,Q2それぞれについて,

ダランベールの解析解 を求めるとともに,

時間とともに波はどのように伝わるのかをグラフに描きなさい.