数理論理学 期末試験 (2015 年 7 月 30 日)

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi\wedge\psi}\ [\wedge\text{導入}] \qquad \frac{\varphi\wedge\psi}{\varphi}\ [\wedge\text{除去}] \qquad \frac{\varphi\wedge\psi}{\psi}\ [\wedge\text{除去}] \qquad \frac{\varphi}{\varphi\vee\psi}\ [\vee\text{導入}] \qquad \frac{\varphi}{\psi\vee\varphi}\ [\vee\text{導入}]$$

$$\frac{\varphi\vee\psi \quad \begin{array}{c}\vdots\ (\mathcal{A})\\ \rho\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ (\mathcal{B})\\ \rho\end{array}}{\rho}\ [\vee\text{除去}]$$ $\mathcal{A}$ 中に仮定 φ や $\mathcal{B}$ 中に仮定 ψ があればここで解消.

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\ (\mathcal{A})\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}\ [\to\text{導入}]$$ $\mathcal{A}$ 中に仮定 φ があればここで解消. $$\frac{\varphi\to\psi \quad \varphi}{\psi}\ [\to\text{除去}]$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\ (\mathcal{A})\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ [\neg\text{導入}]$$ $\mathcal{A}$ 中にある仮定 φ をここで解消. $$\frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\bot}\ [\neg\text{除去}]$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\ (\mathcal{A})\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ [\text{背理法}]$$ $\mathcal{A}$ 中にある仮定 $\neg\varphi$ をここで解消. $$\frac{\bot}{\varphi}\ [\text{矛盾}]$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\ (\mathcal{A})\\ \varphi[y/x]\end{array}}{\forall x\varphi}\ [\forall\text{導入}](\text{注 1}) \qquad \frac{\forall x\varphi}{\varphi[t/x]}\ [\forall\text{除去}](\text{注 2})$$

$$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x\varphi}\ [\exists\text{導入}](\text{注 2}) \qquad \frac{\exists x\varphi \quad \begin{array}{c}\vdots\ (\mathcal{A})\\ \psi\end{array}}{\psi}\ [\exists\text{除去}]$$ $\mathcal{A}$ 中に仮定 $\varphi[y/x]$ があればここで解消.(注 3)

$$\frac{}{t=t}\ [\text{等号公理}](\text{注 4}) \qquad \frac{\varphi[t/x] \quad t=s}{\varphi[s/x]}\ [\text{等号規則}](\text{注 5})$$

(注 1) x は変数記号。y は $\mathcal{A}$ 中の解消されていない仮定の中にも $\forall x\varphi$ の中にも自由出現しない変数記号で，φ 中の x に代入可能なもの。
(注 2) x は変数記号。t は φ 中の x に代入可能な項。
(注 3) x は変数記号。y は $\mathcal{A}$ 中の $\varphi[y/x]$ 以外の解消されていない仮定の中にも $\exists x\varphi$ や ψ の中にも自由出現しない変数記号で，φ 中の x に代入可能なもの。
(注 4) t は項。
(注 5) x は変数記号。t, s は φ 中の x に代入可能な項。

なお $\varphi[t/x]$ は φ 中の x の自由出現をすべて t に置き換えた結果を表す。

【問題１】(10 点)

（1） Γ は閉論理式の集合，φ は閉論理式とする。

$$\Gamma\vdash\varphi \qquad \Gamma\models\varphi$$

それぞれの定義を,「(自然演繹の）導出図,（導出図の）結論,（導出図の）解消されていない仮定，ストラクチャー，真，偽，すべての，任意の，ある，存在する」などの言葉を使って正確に書け。

（2） 授業でやった「自然演繹の完全性・健全性定理」の主張を正確に書け。必ず「$\vdash$, $\models$」の記号を使うこと。

【問題２】(40 点)

A, B, C は命題記号，R は 2 引数の述語記号，x, y は変数記号とする。次の論理式 (1)–(4) のそれぞれが恒真であるか否かを述べて，恒真であるならばそれを導く自然演繹の導出図（仮定がすべて解消されているもの）を書け。恒真でないならばそれを偽にするストラクチャー（(1,2) は命題記号に対する真理値割り当て，(3,4) は変数記号の動く領域と R の意味）を示せ。

(1) $\Big(A\vee(B\wedge C)\Big)\to\Big((A\vee B)\wedge(A\vee C)\Big)$

(2) $(A\to B)\to(B\to A)$

(3) $\Big(\forall x\exists y R(x,y)\Big)\to\Big(\exists y\forall x R(x,y)\Big)$

(4) $\Big(\exists x\forall y R(x,y)\Big)\to\Big(\forall y\exists x R(x,y)\Big)$

【問題３】(15 点)
述語論理のすべての記号を使った論理式を考える場合,「任意の論理式をもらってそれが恒真であるか否かを判定するアルゴリズム」は存在しないことが知られている。そこで論理式を構成する記号を減らしたときにこの状況がどうなるかを考える。

（１） 論理式を構成する記号から $\forall$ を削除して，量化の記号は $\exists$ しか使用できないように制限する（他の記号は制限しない)。このとき,「任意の論理式をもらってそれが恒真であるか否かを判定するアルゴリズム」が存在するか否かを述べて，その理由を説明せよ。

（２） さらに記号を制限して命題論理の論理式しか扱わない（つまり論理式は命題記号と $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \bot$ だけで作られる）場合には,「任意の論理式をもらってそれが恒真であるか否かを判定するアルゴリズム」が存在するか否かを述べて，その理由を説明せよ。

【問題４】(10 点)
$\leftrightarrow$ は次の真理値表で表される論理記号である（「真／偽」を「**T** ／ **F**」と表記する)。

A	B	$A \leftrightarrow B$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**T**

A, B を命題記号とする。次の条件を満たす論理式 φ は存在するか？ 存在するならばそれをひとつ示せ。存在しないならば，存在しないことを証明せよ。

> **（条件）** φ は $A \wedge B$ と同値であり，しかも φ は A, B と $\leftrightarrow$ だけを使って作られる（他の $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ などの論理記号を使わないし，定数 **T**,**F** も使わない)。

【問題５】(10 点)
これは様相論理の問題である。次の論理式が「任意のクリプキモデルの任意の可能世界で真」という性質を持つか否か答えよ。持つ場合は，その理由を簡潔に説明せよ。持たない場合は反例となるクリプキモデルを示せ。

$$\Big(\Box(A \rightarrow \Box B)\Big) \rightarrow \Big((\Box A) \rightarrow (\Box B)\Big)$$