数理論理学 期末試験 (2014 年 7 月 31 日)

$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi\wedge\psi}$ [∧導入]　$\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\varphi}$ [∧除去]　$\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\psi}$ [∧除去]　$\dfrac{\varphi}{\varphi\vee\psi}$ [∨導入]　$\dfrac{\varphi}{\psi\vee\varphi}$ [∨導入]

$\dfrac{\varphi\vee\psi \quad \begin{array}{c}\vdots\,(\mathcal{A})\\ \rho\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,(\mathcal{B})\\ \rho\end{array}}{\rho}$ [∨除去]　$\mathcal{A}$ 中に仮定 φ や $\mathcal{B}$ 中に仮定 ψ があればここで解消.

$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,(\mathcal{A})\\ \psi\end{array}}{\varphi\to\psi}$ [→導入]　$\mathcal{A}$ 中に仮定 φ があればここで解消.　$\dfrac{\varphi\to\psi \quad \varphi}{\psi}$ [→除去]

$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,(\mathcal{A})\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}$ [¬導入]　$\mathcal{A}$ 中にある仮定 φ をここで解消.　$\dfrac{\neg\varphi \quad \varphi}{\bot}$ [¬除去]

$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,(\mathcal{A})\\ \bot\end{array}}{\varphi}$ [背理法]　$\mathcal{A}$ 中にある仮定 $\neg\varphi$ をここで解消.　$\dfrac{\bot}{\varphi}$ [矛盾]

$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,(\mathcal{A})\\ \varphi[y/x]\end{array}}{\forall x\varphi}$ [∀導入](注 1)　$\dfrac{\forall x\varphi}{\varphi[t/x]}$ [∀除去](注 2)

$\dfrac{\varphi[t/x]}{\exists x\varphi}$ [∃導入](注 2)　$\dfrac{\exists x\varphi \quad \begin{array}{c}\vdots\,(\mathcal{A})\\ \psi\end{array}}{\psi}$ [∃除去]　$\mathcal{A}$ 中に仮定 $\varphi[y/x]$ があればここで解消.(注 3)

$\dfrac{}{t=t}$ [等号公理](注 4)　$\dfrac{\varphi[t/x] \quad t=s}{\varphi[s/x]}$ [等号規則](注 5)

(注 1) x は変数記号. y は $\mathcal{A}$ 中の解消されていない仮定の中にも $\forall x\varphi$ の中にも自由出現しない変数記号で, φ 中の x に代入可能なもの.
(注 2) x は変数記号. t は φ 中の x に代入可能な項.
(注 3) x は変数記号. y は $\mathcal{A}$ 中の $\varphi[y/x]$ 以外の解消されていない仮定の中にも $\exists x\varphi$ や ψ の中にも自由出現しない変数記号で, φ 中の x に代入可能なもの.
(注 4) t は項.
(注 5) x は変数記号. t, s は φ 中の x に代入可能な項.

なお $\varphi[t/x]$ は φ 中の x の自由出現をすべて t に置き換えた結果を表す.

【問 1】(50 点)

【1-1】 A, B, C は命題記号, P は 1 引数の述語記号とする。次の (ア)–(エ) のそれぞれの「$\varphi_1, \varphi_2 \models \psi$」に対して, それが成り立つ場合は $\varphi_1, \varphi_2 \vdash \psi$ を表す自然演繹の導出図（すなわち, 仮定 φ_1, φ_2 から結論 ψ を導くもの）を書け。成り立たない場合は, $\varphi_1, \varphi_2 \not\models \psi$ を表すストラクチャー（すなわち φ_1, φ_2 を真にして ψ を偽にするような A, B, C の真理値割り当てと対象領域と P の解釈）を挙げよ。

(ア)　$A\vee B,\ C \ \models\ A\vee(B\wedge C)$

(イ)　$A\to B,\ B\to C \ \models\ C$

(ウ)　$\exists x\big(P(x)\vee A\big),\ B \models\ \forall x\big(P(x)\to(A\wedge B)\big)$

(エ)　$\forall x\big(P(x)\to A\big),\ \exists x P(x) \ \models\ A$

【1-2】 これは様相論理の問題である。次の二つの論理式 (オ)(カ) がそれぞれ「到達可能関係が推移的な任意のクリプキモデルの任意の可能世界で真」であるか否か答えよ。成り立たない場合にはその根拠（反例）となるクリプキモデル（可能世界と到達可能関係と各世界での A の真理値）をひとつ示せ。どの可能世界で問題の論理式が偽になるかも明示すること。成り立つ場合にその理由を書く必要はない。

(オ)　$(\Box\Box A)\to\Box A$

(カ)　$(\Box A)\to\Box\Box A$

【問２】(20 点)
閉論理式の集合 Δ がモデルを持つとは，Δ のすべての要素を同時に真にするストラクチャーが存在することである。

【2-1】次の２条件が同値であることを，$\models$ の定義に従って示せ。

- Δ はモデルを持つ。
- $\Delta \models \bot$ でない。

【2-2】コンパクト性定理とは次の主張である。

Γ は閉論理式の集合とする。Γ の任意の有限部分集合がモデルを持つならば Γ もモデルを持つ。

このコンパクト性定理を，完全性定理を使用して証明せよ。

【2-3】$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は定数記号，$\mathbf{R}$ は２引数の述語記号とする。どんなストラクチャーも，次の見方で有向グラフと見なすことができる。

> 対象領域の各要素をグラフの頂点と見なす。$\mathbf{R}(x, y)$ が成り立つことを,「頂点 x から頂点 y へ有向辺がある」と解釈する。

この見方で，たとえば「$\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ へ長さ 3 のパスがある」とは次の論理式で書ける。

$$\exists x \exists y \Big(\mathbf{R}(\mathbf{a}, x) \wedge \mathbf{R}(x, y) \wedge \mathbf{R}(y, \mathbf{b}) \Big)$$

さて，この見方で「$\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ へのパスがある（長さは有限ならば何でもよい)」という意味の論理式を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{R}$ と変数記号と論理記号だけで書くことができるか？　書けるならばそれを提示せよ。書けないならば書けないことを証明せよ。

（注意）以下に挙げた文字列は論理式ではないので上記の「書ける」という答にはなっていない。

$$\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n \Big(\mathbf{R}(\mathbf{a}, x_1) \wedge \mathbf{R}(x_1, x_2) \wedge \cdots \wedge \mathbf{R}(x_n, \mathbf{b}) \Big)$$

【問３】(15 点)
別紙（2013 年 8 月実施，数理・計算科学専攻修士課程入試問題 問３）