と書ける．

以下では簡単のために，まず $n=2$ の場合について考える．

(a) $\lambda_2 > \lambda_1 > 0, \alpha = 1$ のとき：　図 22 参照.

(b) $\lambda_1 > 0 > \lambda_2, \alpha = 1$ のとき：　図 23 参照.

(c) $0 > \lambda_1 > \lambda_2, \alpha = 1$ のとき：$C_\alpha = \emptyset$ となるが，$\alpha = -1$ ととると (a) のときと同じような等高線となるが λ_1, λ_2 それぞれの絶対値の平方根の逆数をとった値が軸の長さに相当する．図 22 参照.

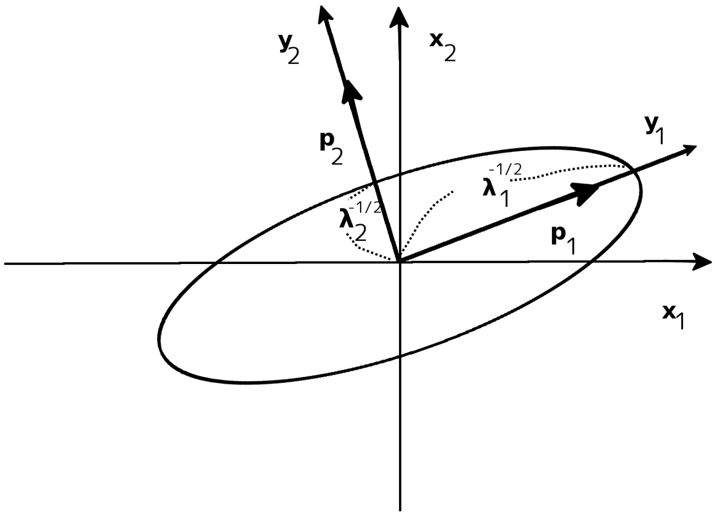

図 22: 2 次元における 2 次形式の等高線—2 つの固有値が同じ符号を持つ場合.

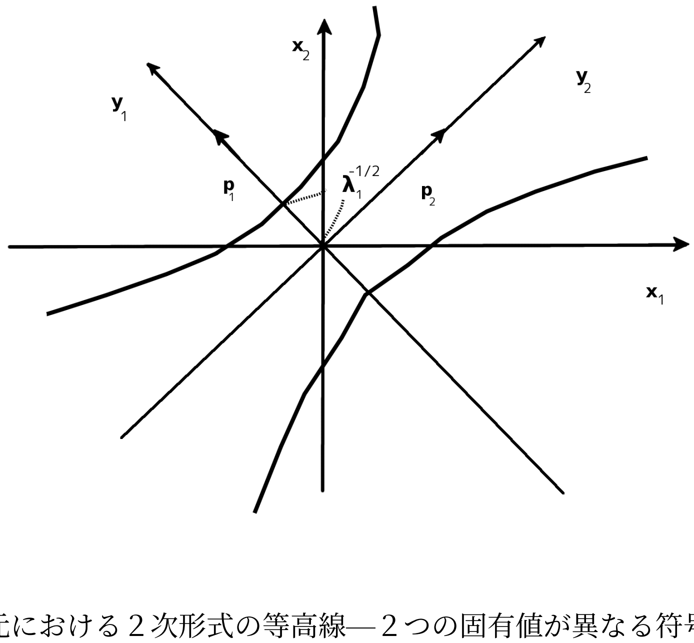

図 23: 2 次元における 2 次形式の等高線—2 つの固有値が異なる符号を持つ場合.

[問題 10-09] 2×2 対称行列の 2 つの固有値のうち 1 つが 0 であるときには，等高線はどのようになるか図示せよ.

[問題 10-10] 2×2 行列 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して,

(a) $\boldsymbol{Q}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(b) 等高線 $C_1 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = 1\}$ を図示せよ．

[問題 10-11] $n \times n$ 対称行列 $\boldsymbol{Q}$ に対して，変数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に関する 2 次形式を $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ で定義する．$\boldsymbol{Q}$ の n 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ は互いに異なっていることを仮定する．

(a) 固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ を $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底にとれることを証明せよ．

(b) $\boldsymbol{Q}$ のすべての固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ が非負であることは，$\boldsymbol{Q}$ が非負定値行列であるための必要十分条件であることを証明せよ．

$n = 3$ の場合には等高線ではなくて，等高面になる．特に，すべての固有値が正の場合には等高面は楕円体になる．

11　複素行列の固有値

今までは，実数の n 次元 Euclid 空間や実数行列を扱ってきた．ここでは少し一般化して，複素行列を考える．つまり $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ を $m \times n$ 複素行列とすると，$a_{ij} \in \mathbb{C} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ である．

実数行列と同様に n 次複素正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ や固有ベクトル $\boldsymbol{p}$ が定義できるが，それらの要素は複素数になることに注意されたい．

定義１１．１：$\boldsymbol{H}$ を n 次複素正方行列としたとき，$\boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{H}$ が成り立つとき，$\boldsymbol{H}$ を Hermite 行列 とよぶ．ただし，$\boldsymbol{H}^* := \overline{\boldsymbol{H}}^T$ は $\boldsymbol{H}$ の 随伴行列 を意味する．

定理１１．２：$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ を n 次 Hermite 行列の固有値とする．

(a) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ は実数であるが，対応する固有ベクトルは複素ベクトルになる．

(b) 固有値 λ_i に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_i$ をお互いに直交し，かつ，その長さを 1 にとることができる．すなわち，

$$(\boldsymbol{p}_i)^T\bar{\boldsymbol{p}_j} = 0 \quad (i \neq j), \qquad \|\boldsymbol{p}_i\| = 1. \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

したがって，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は線形独立になり，ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の基底をなす．

証明（略）:

(a) λ を $\boldsymbol{B}$ の固有値とする．すなわち，

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$$

を仮定する．複素共役を $^-$ で表すとする．$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y})^T = \lambda\boldsymbol{y}^T$ の複素共役をとると，$\bar{\boldsymbol{y}}^T\overline{\boldsymbol{B}}^T = \bar{\boldsymbol{y}}^T\boldsymbol{B}^* = \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{y}}^T$ となる．したがって，

$$\lambda\bar{\boldsymbol{y}}^T\boldsymbol{y} = \bar{\boldsymbol{y}}^T(\lambda\boldsymbol{y}) = \bar{\boldsymbol{y}}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \bar{\boldsymbol{y}}^T\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{y} = \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{y}}^T\boldsymbol{y}$$

となる．ここで，$\bar{\boldsymbol{y}}^T\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{y}\|^2$ はゼロでない実数であるので $\lambda = \bar{\lambda}$ を得る．

注：$\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$，$\boldsymbol{y} = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots, a_n + ib_n)^T$ の場合，$\|\boldsymbol{y}\|^2 = \boldsymbol{y}^T\bar{\boldsymbol{y}} = \bar{\boldsymbol{y}}^T\boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{n}(a_k - ib_k)(a_k + ib_k) = \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$ となる．

(b) $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ を λ, μ の相異なる固有値に対応する固有ベクトルとする．すなわち，

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}, \quad \overline{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{z}} = \mu\bar{\boldsymbol{z}}, \quad \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}.$$

このとき，

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} &= \bar{\boldsymbol{z}}^T(\lambda\boldsymbol{y}) = \lambda\bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{y}, \\ \bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} &= \bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{y} = \mu\bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

となる．よって，

$$0 = \bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = (\lambda - \mu)\bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{y}.$$

仮定より，$\lambda \neq \mu$ であるから，$\bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{y} = 0$ を得る．

注：ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ において，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ と $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$ の内積は $\boldsymbol{y}^T\bar{\boldsymbol{z}} = \bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{n}(a_k^y + ib_k^y)(a_k^z - ib_k^z)$ として定義される．

以上のことから異なる固有値に対する固有ベクトルは直交している．さらに，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{y}$ であれば，両側を $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{\boldsymbol{y}^T\bar{\boldsymbol{y}}}$ で割ることによって

$$\boldsymbol{B}\frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|} = \lambda\frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|}$$

ノルムが 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|}$ を得ることができる．その他の事実についても実対称行列の場合と同じなので省略する．

11.1 Gersgorin の定理（弱い形）

定理１１．３：n 次複素正方行列 $\boldsymbol{H} = (h_{ij})$ の任意の固有値 λ は

$$G_k := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - h_{kk}| \leq r_k\}, \qquad r_k = \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} |h_{kj}|$$

で定義される，複素平面上の n 個の円 G_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ の和集合 $\bigcup_{k=1}^{n} G_k$ の中にある．

証明：$\boldsymbol{H}$ の固有値 λ と対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ としたとき，$\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ より，

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_j = \lambda x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

となる．ここで $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ を $|x_k| = \max_j |x_j| \neq 0$ とおくと，

$$\sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} h_{kj}x_j + h_{kk}x_k = \lambda x_k$$

になるので，

$$|\lambda - h_{kk}| \leq \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} |h_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} |h_{kj}| = r_k$$

を得る.

<u>例：</u>

$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} -2 & -i \\ i & 5 \end{pmatrix}$ の固有値は $\frac{3\pm\sqrt{53}}{2}$ であり，$r_1 = 1, \quad r_2 = 1$ となるので，

$$G_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| \leq 1\}, \qquad G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-5| \leq 1\}$$

の Gersgorin の円が得られる．図 24 を参照.

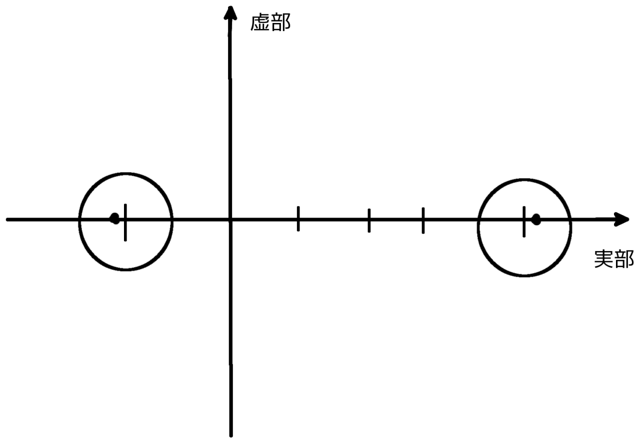

図 24: $\boldsymbol{H}$ に対する Gersgorin の円.