

応用線形代数—第 6 回レポート

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系
福田光浩

2016 年度 第 1 クォーター

提出〆切 5 月 6 日 (金) 16 時 40 分まで

レポートボックス 5-2 応用線形代数

以下の問題では Matlab を用いて答えよ。また、学籍番号の一番最後の桁の数を a とする。例えば、12B56789 ならば $a = 9$ とする。

1. $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ と $e \in \mathbb{R}^3$ を以下のように定義する。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) A のべき乗のうち $A^2, A^3, A^{10}, A^{100}$ を求めよ。
(b) $x = (A^{100})^{-1}e$ とするとき、ベクトル x の第 1 成分を求めよ。
(c) 自然数 n に対する A^n を (a) の結果から推測し、数学的帰納法により証明せよ。
2. 3×3 の対称行列 B を以下のように定義する。

$$B = \begin{pmatrix} 4 \times (a+1) & a+1 & -\sqrt{a+1} \\ a+1 & 4 \times (a+1) & -(a+1) \\ -\sqrt{a+1} & -(a+1) & 4 \times (a+1) \end{pmatrix}$$

- (a) B の固有値のうち、負の固有値の数を答えよ。
(b) Matlab のコマンドで $[P, D] = \text{eig}(B)$ とすると、 B の固有値を対角成分にもつ対角行列 D と固有ベクトルを列とする行列 P に分解できる。 PDP^{-1} と B の差を Matlab のノルムで評価せよ。
(c) $PD^{-1}P^{-1}$ と B^{-1} の差を Matlab のノルムで評価せよ。
(d) Matlab では、行列 X について、 $Y = \text{sqrt}(X)$ とすると X の各成分の平方根を成分に持つ行列 Y が得られる。これを $Y = \sqrt{X}$ と書くこととする。ここで、 $B^{1/2}$ を $B^{1/2} = P\sqrt{D}P^{-1}$ で定義したときに、 $(B^{1/2})^2$ と B の差を Matlab のノルムで評価せよ。

3. $C = QEQ^{-1}$ と b を以下のようにして定義する .

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 10^{a+5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-a-5} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- (a) 線形方程式系 $Cx = b$ を x について解け .
- (b) Cx と b の差を Matlab のノルムで評価せよ .
- (c) 上記の問題 2(b) , 2(c) , 2(d) と比較して 3(b) で求めた値について何か気が付いたことがあれば , 簡単にその事実とその理由を書け .