講義名　連続体力学　配布資料　OCW

第 4 回　ハミルトン方程式

無機材料工学科
准教授　安田公一

１．はじめに

ここでは，今まで天下り的にしか教わってこなかったであろうハミルトニアンの導出過程を示すと共に，その結果として得られるハミルトン方程式について説明する．

２．エネルギー保存則・運動量保存則

まず，ハミルトニアンの導出の準備として，時間と空間の一様性から得られる保存則について検討する．まず，時間の一様性については，ラグランジアンの時間に関する完全導関数を書き出すと，

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \qquad (1)$$

となる．ここで，孤立系を対象とすれば，ラグランジアンが時間に陽に依存しないので，右辺第 3 項は消えて，

(2)

となり，ラグランジュ方程式から $\partial L / \partial q_i = d/dt\left(\partial L / \partial \dot{q}_i\right)$ と書けるので，

$$\frac{dL}{dt} =$$

$$= \qquad (3)$$

したがって，時間に対してラグランジアンが一様であれば，

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{m} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0 \qquad (4)$$

となる．

（以下省略）

３．ハミルトニアンとハミルトン方程式

ラグランジアン $L(q_i,\dot{q}_i,t)$ は，一般化座標 q_i，一般化速度 $\dot{q}_i$，時間 t を独立変数に持つ関数であり，ラグランジュ方程式は 2 階の微分方程式であった．そこで，一般化速度 $\dot{q}_i$ から一般化運動量 p_i に独立変数をルジャンドル変換することにする．すなわち，

$$H(q_i,p_i,t) \equiv \sum_{i=1}^{m} p_i\dot{q}_i - L(q_i,\dot{q}_i,t) \qquad (18)$$

という新たな関数 $H(q_i,p_i,t)$ を定義する．なぜ，引数がこのように変わるのかは，H の微小変化を取るとわかる．

$$
\begin{aligned}
dH &= d\left(\sum_{i=1}^{m} p_i \dot{q}_i\right) - dL \\
&= \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i\right) - \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + p_i d\dot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\
&= \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (19)
\end{aligned}
$$

(18)式の H のことをハミルトニアンと呼ぶ．ハミルトニアンの全微分を取ると，

$$dH = \qquad (20)$$

となり，(19)式と比較すると，

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (21)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (22)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (23)$$

が得られる．この内の(21)式と(22)式をハミルトン方程式と呼ぶ．このハミルトン方程式も点変換 $q_i \to q_i'$ に対して不変であることが証明されている．

４．1 次元調和振動子の問題

図１に示す 1 次元調和振動子の問題についてハミルトニアンを求め，ハミルトン方程式を書き下してみる．さらに，正準変数 (q,p) から，新しい正準変数 (Q,P) に変数変換したときに，ハミルトン方程式が不変になる変換がある．この変数変換は正準変換と呼ばれ，これについても検討する．

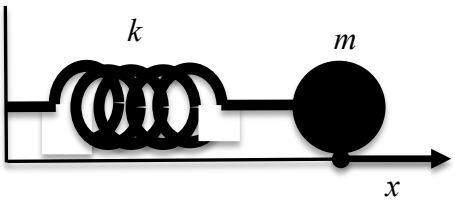

図 1　1 次元調和振動子

まず，この系の運動エネルギー T は

$$T = \qquad (24)$$

ポテンシャルエネルギー U は，

$$U = \qquad (25)$$

したがって，ラグランジアン L は

$$L = \qquad (26)$$

これより，座標（あるいは，一般化座標でもあるが）x に共役な一般化運動量 p は，

$$p = \qquad (27)$$

この p を使ってラグランジアンを書き直すと，

$$L = \qquad (28)$$

(28)式を使ってハミルトニアン H を書き下すと.

$$\begin{aligned} H &= \\ &= \\ &= \qquad (29) \end{aligned}$$

さらに，この調和振動の固有角振動数を ω とすると，$\omega = \sqrt{k/m}$ より，$k = m\omega^2$ となるので，ハミルトニアン H は，

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \qquad (30)$$

となる．これをハミルトン方程式に代入すると，

$$\begin{cases} \dot{x} = & (31) \\ \dot{p} = & (32) \end{cases}$$

となる.

（以下省略）