電磁波

本日のポイント：空間の電場と磁場の変化により形成される波である電磁波を理解する。

電束密度$\boldsymbol{D}$ (C/m^2)と電界$\boldsymbol{E}$ (V/m)

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

真空の誘電率　ε_0 =8.854 ×10^{-12} (F/m):

磁束密度$\boldsymbol{B}$(T)=(N/Am)と磁界$\boldsymbol{H}$ (A/m)

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$$

真空の透磁率　μ_0=4 π ×10^{-7} (N/A^2)=(Tm/A)

電磁気学の基本方程式

マクスウェル４方程式

１．電束密度に関するガウスの法則：

閉曲面 S 全体にわたる電束密度$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$の面積積分は、閉曲面 S の内部にある電荷 $q_{内部}$

(=$\int_V \rho(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r}$、電荷密度：$\rho(\boldsymbol{r},t)$)の総和に等しく閉曲面の外部にある電荷は寄与しない

積分形 $\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = q_{内部}$ (C)　　微分形 $\mathrm{div}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t)$ (C/m^3)

２．磁束密度に対するガウスの法則

磁束密度$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$があっても発散しない（磁荷なるものは存在しない）

積分形 $\oint_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0$　　微分形 $\mathrm{div}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$

３．ファラデーの電磁誘導の法則

磁束密度$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$が時間変化すると誘導起電力（電圧）が生じる

積分形 $\oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) \cdot d\boldsymbol{S}$ (V)　微分形 $\mathrm{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$ (V)

４．アンペール-マクスウェル方程式

電流$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$と変位電流$\frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{dt}$が流れた際にその周りに時計回りに磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$が発生する

積分形 $\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right) \cdot d\boldsymbol{S}$ (A)

微分形 $\mathrm{rot}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$ (A/m^2)

物質中

電束密度$\boldsymbol{D}$ (C/m^2)と電界$\boldsymbol{E}$ (V/m)

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

誘電率　ε

磁束密度$\boldsymbol{B}$(T)=(N/Am)と磁界$\boldsymbol{H}$ (A/m)

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

透磁率　μ

電磁波の波動方程式

真空の空間($\rho = 0, \boldsymbol{j} = 0$)に時間的に変化する電界$\boldsymbol{E}$と磁束密度$\boldsymbol{B}$が存在する時のマクスウェル方程式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

電界と磁束密度は、空間的にxだけの関数で表す(x方向に進む)

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

$$0 = \frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$0 = \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_z}{\partial t}$$

波動方程式

$$E_x = B_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$$

波動方程式を解く

$$E_z(x,t) = f(kx - \omega t) + g(kx + \omega t)$$

$f(kx - \omega t)$　進行波：x軸の正の方向に波数k、角周波数ω、速度$v = \frac{\omega}{k}$で進む波

$g(kx + \omega t)$　後退波：x軸の負の方向に波数k、角周波数ω、速度$v = \frac{\omega}{k}$で進む波

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}、\quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

$s = kx - \omega t$、$s' = kx + \omega t$とおく

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial s'}\frac{\partial s'}{\partial x} = k\frac{\partial f}{\partial s} + k\frac{\partial g}{\partial s'} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$B_y(x,t) = af(kx - \omega t) + bg(kx + \omega t)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = a\frac{\partial f}{\partial t} + b\frac{\partial g}{\partial t} = a\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} + b\frac{\partial g}{\partial s'}\frac{\partial s'}{\partial t} = -a\omega\frac{\partial f}{\partial s} + b\omega\frac{\partial g}{\partial s'}$$

$$a = -\frac{k}{\omega}、\quad b = \frac{k}{\omega}$$

$$E_z(x,t) = f(kx - \omega t) + g(kx + \omega t)$$

$$B_y(x,t) = -\frac{k}{\omega}[f(kx - \omega t) - g(kx + \omega t)]$$

電磁波

電界と磁束密度共に

1. 同じ速度$v = \frac{\omega}{k}$、同じ位相差でx軸方向に進む
2. 進行方向のx軸方向に垂直に振動（横波）
3. 進行方向に平行な振動（縦波）は無い

電界と磁束密度の関係

4. 電界の振動方向(z方向)と磁束密度の振動方向(y方向)は直交（垂直）
5. 電界がz軸の正方向の時、磁束密度はy軸の負方向

x軸の正の方向に波数k、角周波数ωで進む電磁波のy方向の電界が
$E_y(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t)$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} k^2 E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

真空の誘電率　ε_0 =8.854 ×10^{-12} (F/m):
真空の透磁率　μ_0=4 π ×10^{-7} (N/A^2)=(Tm/A)

光速$c = v = 2.99792\times10^8 = 3.00\times10^8$ (m/s)

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -kE_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$B_z = \int \frac{\partial B_z}{\partial t}\partial t = \int -kE_0 \sin(kx - \omega t)\, dt = \frac{k}{\omega} E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$B_z = B_0 \sin(kx - \omega t) = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$B_0 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} E_0$$

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0$$