時間的に変化する場、電磁誘導、変位電流

本日ポイント：時間的に変化する場として、磁束が時間的に変化する際に導体に生じる電位差を表す電磁誘導、電束密度が時間的に変化する際に発生する電流を表す変位電流について理解する。

電磁誘導

閉曲線からなる導線を貫く鎖交する磁束が変化すると、鎖交磁束の変化を打ち消す方向に電流が流れる

磁束密度が時間的に変化する際、その周りの空間には誘導電界$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$が誘起される

誘導起電力　$\varepsilon = \int_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{r}$ (V)

鎖交磁束　$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S}$ (Wb) (Tm^2)

lを外周とする面S

ファラデーの電磁誘導の法則: マクスウェル方程式

磁束密度$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$が時間変化すると誘導起電力（電圧）$\varepsilon$が生じる

$$\varepsilon = \oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S} \text{ (V)}$$

N 回巻

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} \text{ (V)}$$

レンツの法則：誘導電流I：導線のループの抵抗をRとする

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$

面積が変化する際の電磁誘導現象：

磁束密度Bが変化しなくても、閉曲線からなる導線のループが変化し、鎖交する磁束が変化すると、鎖交磁束の変化を妨げる力が生じるような電流が流れる

コの字型の導線上に一辺の長さaの直線導線がループ(面積A)を作り、
ループの面積を拡げる方向に、速度vで動くとき

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S} = BA$$

起電力 $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dA}{dt} = -Bav$

相互誘導: 閉曲線からなる２つの導線l_1、l_2が近接し、電流I_1、I_2が流れる

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt}$$

M：相互インダクタンス (Wb/A) (H) ヘンリー

自己誘導: 閉曲線からなる導線lが存在し、電流Iが流れる

$$\Phi(t) = LI(t)$$

L：自己インダクタンス (Wb/A) (H) ヘンリー

電流が流れる瞬間や交流が流れる場合

逆起電力 $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI(t)}{dt}$

自己誘導：電流の変化を妨げる向きに電圧が発生する

長いソレノイドの自己インダクタンス: 長さl、断面積A、総巻き数N
ソレノイド電流Iを流した際の内部の磁束密度

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

回路を貫く磁束

$$\Phi = AB = \frac{\mu_0 NIA}{l}$$

ソレノイド自身はこの磁束をN回巻くので

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 IA}{lI} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$$

平行平板電極を含む回路

アンペールの法則より

電流密度$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$で流れる場合

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S}$$

導線部分

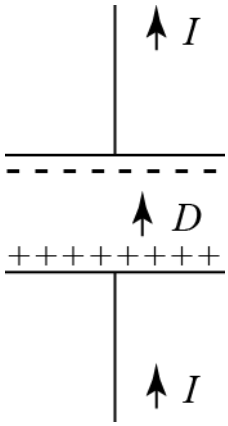
$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{r} = I(t)$$

極板間

$$\int_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S} = q(t)$$

変位電流$I(t)$

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S}$$



アンペール-マクスウェル方程式

電流$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$と変位電流$\frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{dt}$が流れた際にその周りに時計回りに磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$が発生する

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{dt}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \quad \text{(A)}$$

ソレノイドに蓄えられる磁界のエネルギー

長さl、断面積A、総巻き数Nの長いソレノイド

コイルの電流I'を$\frac{dI'}{dt}$で増加させる

逆起電力

$$V_L' = -L\frac{dI'(t)}{dt}$$

外部から起電力（電圧）$\varepsilon'(t)$を加える

$$\varepsilon'(t) = -V_L' = L\frac{dI'(t)}{dt}$$

電流源の仕事dW

$$dW = \varepsilon'(t)I'(t)dt = L\frac{dI'(t)}{dt}I'dt$$

時刻Tに電流がIになるまでの仕事W

$$W = \int dW = \int_0^T L\frac{dI'}{dt}I'dt = \frac{L}{2}\int_0^T L\frac{dI'^2}{dt}dt = \frac{1}{2}LI^2$$

ソレノイド内部に蓄えられている磁界のエネルギーU_L

$$U_L = W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 A}{l}I^2$$

磁界のエネルギー密度u_L

$$u_L = \frac{U_L}{Al} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2}{l^2}I^2$$

磁界の強さ$\boldsymbol{H}$、磁束密度$\boldsymbol{B}$の大きさ

$$H = \frac{NI}{l}$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

磁界のエネルギー密度u_L

$$u_L = \frac{1}{2}HB = \frac{B^2}{2\mu_0}$$