静磁界、アンペールの法則、ビオーサバールの法則

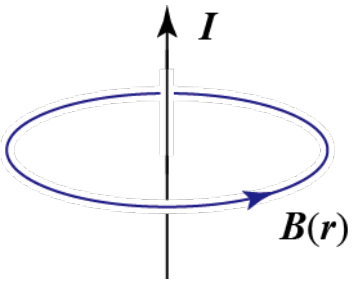
本日のポイント：１．定常電流が形成する静磁界（静磁場）、２．電流の流れる方向を右ネジの進む方向として、右ネジの回る方向に磁場が生じることを示すアンペールの法則、３．電流の周りに生じる磁場を与えるビオーサバールの法則について理解する。

電流の周りの磁界

直流電流Iの周りには軸を回る渦状の磁束密度ができる

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\varphi \ \ (\mathrm{T})\ (\mathrm{N/(Am)})$$

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$は右ネジを$I$の方向に進めるときに回す向き



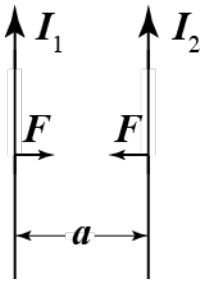
平行に流れている直流電流の周りの磁界

距離aだけ離れて平行に流れる直流電流$\boldsymbol{I}_1$、$\boldsymbol{I}_2$に働く力

$$F \propto \frac{I_1 I_2}{a}\ \ (\mathrm{N/m})\ \ \Delta F = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\Delta l$$

$\boldsymbol{I}_1$と$\boldsymbol{I}_2$が同方向の場合：引力

$\boldsymbol{I}_1$と$\boldsymbol{I}_2$が逆方向の場合：斥力



ベクトル積

ベクトル$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$のベクトル積（外積）

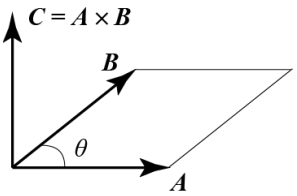
$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$

向き$\boldsymbol{C} \perp \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$で決まる面に垂直

$\boldsymbol{A}$から$\boldsymbol{B}$に向かってまわした右ネジが進む方向

大きさ$|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$



$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$$

$\boldsymbol{A} \parallel \boldsymbol{B}$のとき、$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = 0$

$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$、$\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y,\ A_zB_x - A_xB_z,\ A_xB_y - A_yB_x)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z)\times(B_x\boldsymbol{e}_x + B_y\boldsymbol{e}_y + B_z\boldsymbol{e}_z)\\
&= A_xB_x\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_x + A_xB_y\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y + A_xB_z\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_z\\
&\quad + A_yB_x\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_x + A_yB_y\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_y + A_yB_z\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z\\
&\quad + A_zB_x\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x + A_zB_y\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y + A_zB_z\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_z\\
&= (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y + (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x\\
&= (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{e}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

ローレンツ力$\boldsymbol{F}$と磁束密度$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$

電界により電荷に加わる力とフレミングの左手の法則より電荷qに加わる力は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$$

サイクロトロン

一様な磁束密度$\boldsymbol{B}$が存在し、$\boldsymbol{B}$に垂直で速度$\boldsymbol{v}_0$で打ち出された電子eの等速円運動

半径a

ローレンツ力　$\boldsymbol{F} = ev_0B$ (N)

向心力　$\frac{m{v_0}^2}{a}$ (N)

力の釣り合い　$\boldsymbol{F} = ev_0B = \frac{m{v_0}^2}{a}$ (N)

半径　$a = \frac{mv_0}{eB}$ (m)

回転周期　$T = \frac{2\pi a}{v_0} = \frac{2\pi m}{eB}$ (s)

角周波数　$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{eB}{m}$

磁界の強さ$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$と磁束密度$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$

磁界の強さ$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ (A/m) 電流に関係づけて定義

磁束密度$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ (T) 運動する電荷に加わる力に関係づけて定義

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$$

μ_0：真空の透磁率 (Tm/A)

ビオーサバールの法則：

電流素片$Id\boldsymbol{r}'$により点$\boldsymbol{r}$に生じる磁界の強さ$d\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ (A/m)

$$d\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{Id\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} = \frac{Id\boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

直流電流の周りの磁界の強さ

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \oint_l d\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \oint_l \frac{Id\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} = \oint_l \frac{Id\boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

z軸上の直線直流電流Iの周りのx軸上の点$\boldsymbol{r}=(a,0,0)$の磁界の強さ

z軸上の点$\boldsymbol{r}'=(0,0,z')$、$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$、$\boldsymbol{e}_z$ と$\boldsymbol{R}$のなす角θ

電流素片$Id\boldsymbol{r}'$が点$\boldsymbol{r}$に生じさせる磁界の強さ

$$d\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\frac{Id\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}=\frac{Idz'\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}}{4\pi R^2}=\frac{Idz'\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}}{4\pi R^2}=\frac{Idz'\sin\theta}{4\pi R^2}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$H=\frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\theta dz'}{R^2}=\frac{I}{4\pi a}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta=\frac{I}{2\pi a}$$

$$z'=-a\cot\theta$$

$$dz'=\frac{ad\theta}{\sin^2\theta}=\frac{R^2}{a}d\theta$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\frac{I}{2\pi a}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\boldsymbol{e}_\varphi$$

アンペールの法則

任意の閉曲線lに沿った$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$の循環は、閉曲線を縁とする面を貫く電流の和と等しい

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\oint_l \frac{I}{2\pi a}\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}_\varphi a d\varphi=I$$

複数の電流が貫く（鎖交する）場合

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\sum_{l\text{を縁とする任意の面を貫く}} I_i$$

電流密度$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$で流れる場合

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$$

アンペール-マクスウェル方程式：マクスウェル方程式

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{r}=\int_S\left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{dt}\right)\cdot d\boldsymbol{S}\quad\text{(A)}$$

無限に長いソレノイド周りの磁場

z軸を中心に時計と反対回り(上から見た場合)、半径a、電流I、
導線の 1m 当たりの巻数n回
巻き線を含むz軸に平行な長方形 ABCD の閉曲線(AD が底辺)
z軸方向の線積分の長さl

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\mathrm{D}}^{\mathrm{A}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} H_{\mathrm{A\,地点}}\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z dz + 0 + \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} H_{\mathrm{D\,地点}}\boldsymbol{e}_z\cdot(-\boldsymbol{e}_z)dz + 0$$

$$=\sum_{l\text{を縁とする任意の面を貫く}} I_i$$

閉曲線の長方形がソレノイドに含まれる場合

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = H_{\mathrm{A\,地点}}l - H_{\mathrm{D\,地点}}l = 0$$

$H_{\mathrm{A\,地点}} = H_{\mathrm{D\,地点}}$
ソレノイド内部の磁界の強さ$H_{内側}$は、z軸に平行で一様

閉曲線の長方形がソレノイドに含まれない場合

$H_{\mathrm{A\,地点}} = H_{\mathrm{D\,地点}} = 0$
辺 AB が無限遠でも成り立つため、ソレノイド外部の磁界の強さ$H_{外側}$は 0

閉曲線の長方形の辺 AB がソレノイドに含まれ、ソレノイドを跨ぐ場合

$H_{内側}l = nlI$
$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = nI\boldsymbol{e}_z$
$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 nI\boldsymbol{e}_z$

電流Iが受ける力

ローレンツ力　$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$

磁束密度$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$中の導線の無限小部分$d\boldsymbol{r}$
線密度$\lambda(\boldsymbol{r})$の電荷が速度$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$で流れる
$d\boldsymbol{F} = dq\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = \lambda dl\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = \lambda v d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B} = Id\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B}$

平行直線直流電流の力

距離aだけ離れて平行に流れる直流電流$\boldsymbol{I}_1$、$\boldsymbol{I}_2$に働く力

導線$\boldsymbol{I}_2$上の導線$\boldsymbol{I}_1$による磁束密度

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$d\boldsymbol{F}_{21} = I_2 \Delta \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r}_2) = I_2 \Delta l_2 \boldsymbol{e}_z \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\boldsymbol{e}_\varphi = -\frac{\mu_0 I_1 l_2}{2\pi a}\Delta l_2 \boldsymbol{e}_\xi$$

$\boldsymbol{I}_1$と$\boldsymbol{I}_2$が同方向の場合：引力

$\boldsymbol{I}_1$と$\boldsymbol{I}_2$が逆方向の場合：斥力

透磁率μ_0、クーロン(C)、アンペア(A)の定義

真空の透磁率μ_0＝4π×10^{-7}　(Tm/A)

1 クーロン(C): 1(A)の電流が 1(s)の間に運ぶ電荷量

1m 離れた、1A の平行電流の力f =2×10^{-7}　(N)

一様な磁束密度$\boldsymbol{B}$（z軸に平行）中の長方形（辺の長さa、b）電流ループIに働く力

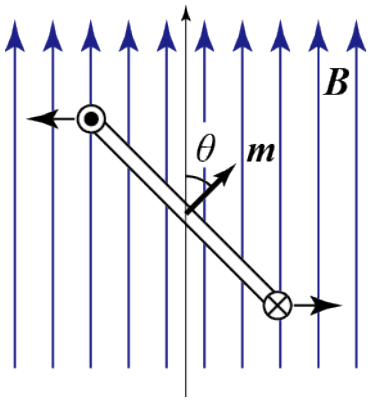
下辺aがz軸と垂直

磁気モーメント

$$\boldsymbol{m} = abI\boldsymbol{n} = AI\boldsymbol{n}$$

$\boldsymbol{n}$の向きは、電流が流れている向きに回したとき、右ネジが進む方向

θは、磁気モーメント$\boldsymbol{m}$とz軸のなす角



上辺は左方向、下辺が右方向の力（偶力）

$$F = IaB$$

偶力のモーメント$\boldsymbol{N}$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$$

$$N = abIB\sin\theta$$

$\boldsymbol{N}$の向きは偶力により回転された右ネジが進む向き

（この場合紙面に垂直で裏側から表側）

磁束密度に対するマクスウェル方程式：磁束密度に対するガウスの法則

磁束密度$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$があっても発散しない（磁荷なるものは存在しない）

$$\oint_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

磁束Φ (Tm^2)=(Wb)と磁束密度$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ (T)

任意の面 S を貫く磁束Φ

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$$