静電エネルギーと力

本日のポイント：コンデンサに蓄えられるエネルギーに相当する静電エネルギーと電荷に加わる静電気力を理解する。

電界のエネルギー
導体間の電位差V: 静電容量C (F)の導体対に電荷qと$-q$ (C)が帯電し、

$$V = \frac{q}{C} \text{ (V)}$$

仕事W (J): 電荷qと$-q$を帯電させるのに必要な仕事

$$W = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 \text{ (J)}$$

エネルギー密度（真空中）

$$u_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E(r)^2 \text{ (J/m}^3\text{)}$$

平行平板コンデンサ
静電容量（極板面積A、極板間隔d）

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \text{ (F)}$$

電荷qと$-q$を帯電しているときの極板間の電位差V (V)

$$V = \frac{d}{\varepsilon_0 A} q \text{ (F)}$$

電荷qと$-q$を帯電させるのに必要な仕事W (J)

$$W = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C} = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} V^2 \text{ (J)}$$

極板間の体積Adの直方体における単位体積あたりのエネルギー密度u_e

$$u_e = \frac{W}{Ad} = \frac{\varepsilon_0}{2d^2} V^2 \text{ (J)}$$

球内（半径a）に一様に電荷密度ρ (C/m^3)で分布した球

その１　厚さdrを加える方法でエネルギーW (仕事)を求める

球表面の無限遠を基準とした静電ポテンシャル（電位）

$$\phi(r) = \frac{\left(\frac{4\pi}{3}\right)r^3\rho}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0} \text{ (V)}$$

厚さdrの電荷密度ρの層を付け加える

$$dq = 4\pi r^2 \rho dr$$

$$dW = \phi(r)dq = \frac{4\pi\rho^2 r^4 dr}{3\varepsilon_0}$$

$$W = \int dW = \int_0^a \frac{4\pi\rho^2 r^4}{3\varepsilon_0} dr = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\frac{r^5}{5}\Big|_0^a = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\varepsilon_0}$$

その２　エネルギー密度から蓄えられているエネルギーUを求める

電束密度$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$、電界$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

$r \leq a$

$$q_{内部} = \frac{4\pi r^3}{3}\rho$$

$$D(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{4\pi r^3}{3}\rho = \frac{r}{3}\rho \text{ 、} E(r) = \frac{r}{3\varepsilon_0}\rho$$

$$u_e(r) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho^2 r^2}{18\varepsilon_0} \text{ (J/m}^3\text{)}$$

$r \geq a$

$$q_{内部} = \frac{4\pi a^3}{3}\rho$$

$$D(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{4\pi a^3}{3}\rho = \frac{a^3}{3r^2}\rho \text{ 、} E(r) = \frac{a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\rho$$

$$u_e(r) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho^2 a^6}{18r^4} \text{ (J/m}^3\text{)}$$

エネルギーU

$$U = \int_0^\infty 4\pi r^2 u_e(r)dr = \int_0^a \frac{2\pi\rho^2 r^4}{9\varepsilon_0}dr + \int_a^\infty \frac{2\pi\rho^2 a^6}{9\varepsilon_0 r^2}dr =$$

$$= \frac{2\pi\varepsilon_0\rho^2}{9\varepsilon_0}\frac{r^5}{5}\Big|_0^a + \frac{2\pi\rho^2 a^6}{9\varepsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_a^\infty$$

$$= \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\varepsilon_0}$$

エネルギーと静電気力$\boldsymbol{F}$ (N)

xの正方向を向いた一様な電界$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$の中にある電荷$q$

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \ \ (\mathrm{J/m^3})$$

仮想変位の原理

原点を基準とした点$\boldsymbol{r}(x, y, x)$の位置エネルギー

$$U(\boldsymbol{r}) = -qEx$$

電荷をΔx移動させた際の位置エネルギーの変化

$$\Delta U(\boldsymbol{r}) = -qE(x + \Delta x) - (-qEx) = qE\Delta x$$

電荷が受ける力

$$F_x = -\frac{\Delta U(\boldsymbol{r})}{\Delta x} = qE \ \ (\mathrm{N})$$

$$F_y = F_z = 0 \ \ (\mathrm{N})$$

平行平板コンデンサの場合

静電容量（極板面積A、極板間隔d）

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \ \ (\mathrm{F})、q = CV$$

蓄えられている位置エネルギー$U(d)$

$$U(d) = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{q^2}{2C}$$

電荷qと$-q$の帯電電荷に変化が無い場合

$$\Delta U(d) = \frac{q^2}{2\frac{\varepsilon_0 A}{d+\Delta d}} - \frac{q^2}{2\frac{\varepsilon_0 A}{d}} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}\Delta d$$

電極間に働く力ΔF_d (N) (引力)

$$\Delta F_d = -\frac{\Delta U(d)}{\Delta d} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 A} = -\frac{qV}{2d} = -\frac{1}{2}qE \ \ (\mathrm{N})$$