誘電体と静電界

本日のポイント：絶縁性の材料からなる誘電体の物性と誘電体内に形成される静電界を理解する。

誘電体：電気を通さない絶縁体材料は全て誘電体

誘電体の静電気現象：

1．誘電分極：帯電していない誘電体に電荷qを近づけると、電荷qに近い部分に異なる符号の電荷、遠い部分に同じ符号の電荷が誘起される。これにより、誘電体と電荷の間には引力が生じる
2．誘電分極が起きている誘電体を近い側と遠い側で切り分けて、電荷qを遠ざけると、どちらも帯電していない（比較：導体では、それぞれが正と負に帯電）
3．誘電体を帯電させると、電荷は帯電させた場所に留まる
（比較：導体では、静電遮蔽により電荷は表面上に分布）
4．充電した平行平板コンデンサを電源から切り離し、極板間に誘電体を挿入すると、極板間の電位差は減少する。すなわち、静電容量は増加する。
5．電源につないだままの平行平板コンデンサの極板間に誘電体を挿入すると、電源から極板に電流が流れ込み、極板の電荷量が増加する。

誘電体の誘電率ε (F/m)、比誘電率ε_r (>1)、真空の誘電率ε_0 (=8.854×10^{-12} F/m)

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad \text{(F/m)}$$

比誘電率ε_rの誘電体を含むコンデンサ(極板面積A、極板間隔d)の静電容量C

$$C \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d} \quad \text{(F)}$$

電気双極子：同じ大きさの正負の電荷$+q$と$-q$の対が距離dだけ離れて存在している状態、マクロなスケールでは電荷中性

双極子モーメント

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d} \ \text{(Cm)}$$

誘電分極$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$：双極子モーメントの空間密度

誘電体に電界を加えると、誘電体は中性のままで、双極子モーメントが生じる

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i(\Delta V内)} \boldsymbol{p}_i}{\Delta V} \ \text{(C/m}^2\text{)}$$

誘電分極の起源：

界面分極：誘電体中の界面にキャリアが蓄積されることによる分極

配向分極：永久双極子の電界による配向による分極

イオン分極：材料中の結合している正負イオンの変位による分極

電子分極：原子核と電子雲の正負の電荷の変位による分極

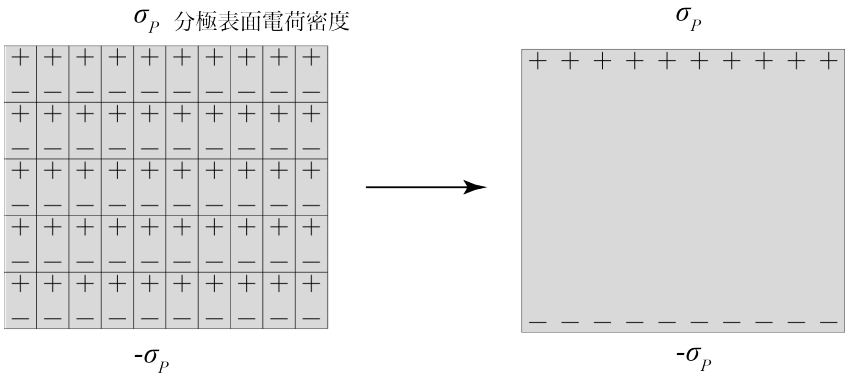
周波数応答は、早い順に、電子分極、イオン分極、配向分極、界面分極

光学的周波数領域：電子分極、イオン分極

電気的周波数領域：配向分極、界面分極

一様な分極をした直方体：

誘電体の分極は中性の双極子モーメントを重ね合わせたもの



上面にσ_P、下面に$-\sigma_P$の分極表面電荷密度がある時の電界を内外に作る

実際の電界は、この分極とこの分極を作る外部からの電界の重ね合わせ

誘電体中の電束密度

真空中

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \quad (\mathrm{C/m^2})$$

誘電体中：

静電界しか存在しない

$$\oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \ \ (\mathrm{V})$$

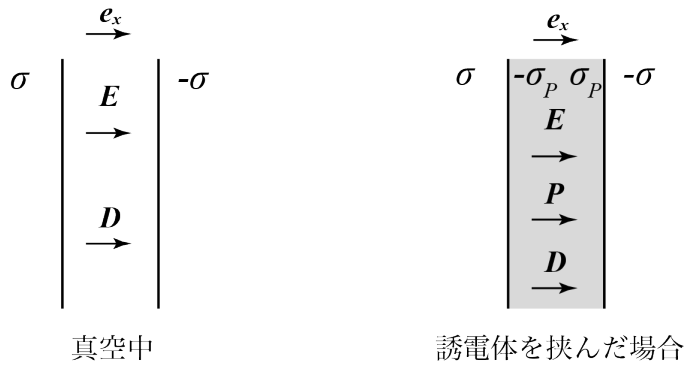
双極子モーメントは真電荷を持たないのでガウスの法則は成り立つ

真電荷がある場合 $\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = q_{内部}$ (C)

真電荷がない場合 $\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0$ (C)

誘電体中の電束密度

平行平板コンデンサ



真空中　　誘電体を挟んだ場合

極板の面電荷密度σ

平行平板電極間の電束密度、電界

真空中

電束密度　$\boldsymbol{D} = \frac{\sigma}{2}\boldsymbol{e}_x - \frac{-\sigma}{2}\boldsymbol{e}_x = \sigma\boldsymbol{e}_x$　(C/m^2)

電界　$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x$　(V/m)

誘電体を挟んだ場合(極板の面電荷密度σは真空中と同じ値)

双極子モーメントは真電荷を持たないので

電束密度　$\boldsymbol{D} = \sigma\boldsymbol{e}_x$　(C/m^2)

電界は、極板の真電荷密度σと

誘電体表面に仮想的に生じる分極電荷密度σ_Pの寄与の重ね合わせ

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x - \frac{\sigma_P}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x = \frac{\sigma\boldsymbol{e}_x - \sigma_P\boldsymbol{e}_x}{\varepsilon_0} = \frac{\boldsymbol{D}-\boldsymbol{P}}{\varepsilon_0}$$

※ベクトル$\boldsymbol{P}$の向きに注意

したがって、

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

一般化　$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$

誘電率、電気感受率、比誘電率

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$　χ_e:電気感受率

$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

誘電率：　$\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e)$ $(> \varepsilon_0)$

比誘電率：$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$　(> 1)

真空中と誘電体を挟んだ場合の比較

電束密度 $\boldsymbol{D}_{\text{真空中}} = \boldsymbol{D}_{\text{誘電体中}} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$

電界(真空中、誘電体中共) $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon_0}}{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{E}_{\text{真空中}}$

さまざまな材料の比誘電率（常温、20℃)、絶縁破壊強度

材料	比誘電率ε_r	絶縁破壊強度(V/m)
真空	1	
空気（1気圧)	1	3×10^6
超純水	80.1	
ポリエチレン	2.3	～18×10^6
SiO_2	3.9	～500×10^6
Si	11.9	
HfO_2	13～40	
$BaTiO_3$	10,000	

誘電体界面での電束密度Dと電界Eの境界条件

1．電束密度$\boldsymbol{D}$の放線成分$\boldsymbol{D}_n$は誘電体界面で連続
分極表面電荷は真電荷を持たないため。

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot \Delta \boldsymbol{S} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})_{\text{上面}} \cdot \boldsymbol{n}\Delta A + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}')_{\text{下面}} \cdot (-\boldsymbol{n})\Delta A = 0$$

$$D_n(\boldsymbol{r})_{\text{上面}} = D_n(\boldsymbol{r}')_{\text{下面}}$$
$$D(\boldsymbol{r})_{\text{上面}} \cos\theta = D(\boldsymbol{r}')_{\text{下面}} \cos\theta'$$

θ, θ'は、上面、下面における放線からの角度

2．電界$\boldsymbol{E}$の接線成分$\boldsymbol{E}_t$は誘電体界面で連続

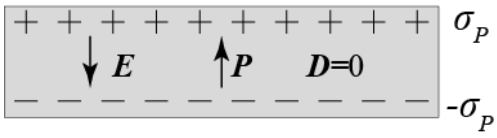
$$\oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})_{\text{上面}} \cdot \boldsymbol{t}\Delta l + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')_{\text{下面}} \cdot (-\boldsymbol{t})\Delta l = 0$$

$$E_t(\boldsymbol{r})_{\text{上面}} = E_t(\boldsymbol{r}')_{\text{下面}}$$
$$E(\boldsymbol{r})_{\text{上面}} \sin\theta = E(\boldsymbol{r}')_{\text{下面}} \sin\theta'$$

強誘電体：自発分極をもつ材料

自発分極：外部から電界を加えた際に分極$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$が生じ、電界を 0 に戻しても、
双極子モーメンが整列した状態

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$$



誘電体内 $\boldsymbol{E} = -\frac{\sigma_P}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z = -\frac{\boldsymbol{P}}{\varepsilon_0}$

σ_P：分極電荷表面密度

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} = 0$$