導体、ラプラス・ポアソンの方程式、境界条件

本日のポイント：導体上に電荷がある場合と無い場合の静電界を与えるラプラス・ポアソン方程式を理解し、境界条件を入れて解けるようにする。

電位差
点$\boldsymbol{r}$ を基準とする点$\boldsymbol{r}'$の静電ポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{r}') - \phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}'} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \ (\mathrm{V})$$

ポテンシャルエネルギー（第２回の追加）：点$\boldsymbol{r}$にある電荷qが基準点$\boldsymbol{r}_0$まで移動する時に、電界$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$がする仕事

$$U(\boldsymbol{r}) = q\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = -q\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = q\phi(\boldsymbol{r}) \quad (\mathrm{J})$$

電荷の周りの電束密度に対するガウスの法則
ポアソン場：電荷qが閉曲面 S 内にある場合

$$q_{\text{内部}} = \oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot \Delta\boldsymbol{S}$$

ラプラス場：電荷が閉曲面 S 内に無い場合

$$0 = \oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot \Delta\boldsymbol{S}$$

ガウスの定理（発散定理）より、

$$\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot \Delta\boldsymbol{S} = \int_{\mathrm{V}} \mathrm{div}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) dV$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{q}{\Delta V} = \rho(\boldsymbol{r})$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{grad}V(\boldsymbol{r})$$

ポアソン方程式：電荷密度$\rho(r)$が存在する場合

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}V(\boldsymbol{r})) = \nabla^2 V(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}$$

ラプラス方程式：電荷密度$\rho(r)$が無い場合

$$\nabla^2 V(\boldsymbol{r}) = 0$$

導体：自由電子を有する金属、半導体などの絶縁体以外の材料

導体の静電気現象

１．静電遮蔽：導体帯電させると、電荷は表面上に分布する

導体内部　$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$

２．空洞を持った導体の内表面に電荷を与えても、電荷は全て導体の外表面に分布し、導体内部（内表面）には、正味の電荷(net charge)は存在しない

導体内部　$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = 0$

３．静電誘導：導体に電荷qを近づけると、電荷qに近い側にqと反対符号の電荷、遠い側に同じ符号の電荷が誘起される

導体内部　$\boldsymbol{E}_q(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{近}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{遠}(\boldsymbol{r}) = 0$

４．静電誘導が起きている導体を近い側と遠い側で切り分けると、それぞれが正と負に帯電する

５．導体内部および表面は同電位

６．導体表面のごく近傍の電界　$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$は、表面に垂直

導体表面近傍の電界と表面電荷密度

導体表面上の点$\boldsymbol{r}$の面電荷密度を$\sigma(\boldsymbol{r})$

点$\boldsymbol{r}$のすぐ外側の電束密度を$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}_>)$

点$\boldsymbol{r}$を含む微小円筒におけるガウスの法則

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{外側} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{内側} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{側面} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = D(\boldsymbol{r}_>)\Delta A + 0 + 0$$

$$q_{内部} = \sigma(\boldsymbol{r})\Delta A$$

したがって、

$$D(\boldsymbol{r}_>) = \sigma(\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}_>) = \sigma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$$

$$E(\boldsymbol{r}_>) = \frac{\sigma(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_>) = \frac{\sigma(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$$

ただし、$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$は放線ベクトル

導体球内外の電界$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$と静電ポテンシャル$\phi(\boldsymbol{r})$

半径a、電荷$q\ (>0)$

導体内部　$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0$

導体外部　$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$

静電ポテンシャル　$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\quad(r\geq a)$

$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\quad(r\leq a)$　（一定）

中空導体球の中心に点電荷$q\ (>0)$があるとき

内半径a_1、外半径a_2、電荷$q\ (>0)$

$r<a_1$　$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r$、　$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$

$a_1<r<a_2$　$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=0$、　$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0$

$r=a_1$　$\oint_{\text{導体内閉曲面 S}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=q+q_1=0$

したがって、$q_1=-q$

内表面電荷密度　$\sigma_1=-\frac{q}{4\pi {a_1}^2}$

$r=a_2$　$\oint_{\text{導体外閉曲面 S}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=q+q_1+q_2=q$

したがって、$q_2=q$

外表面電荷密度　$\sigma_2=-\frac{q}{4\pi {a_2}^2}$

$r>a_2$　$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r$、　$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$

孤立した導体の静電容量C (F)

$q=C\phi$　　すなわち、$Q=CV$

導体球の静電容量

半径a、電荷q

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$C = \frac{q}{\phi} = 4\pi\varepsilon_0 a$$

コンデンサ：２個の導体の静電容量

導体 1 に電荷q 、導体 2 に電荷$-q$

$$V_{12} = \phi_1 - \phi_2$$
$$q = CV_{12}$$

平行平板コンデンサ

上部平板導体 1 に電荷q 、下部平板導体 2 に電荷$-q$、導体間隔d、面積S

電極間の電束密度　$\boldsymbol{D} = -D\boldsymbol{e}_z = -\sigma\boldsymbol{e}_z$

電界　$\boldsymbol{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z$

電極間電位差　$V_{12} = \phi_1 - \phi_2 = -\int_{r_2}^{r_1} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$

コンデンサの静電容量：$C = \frac{q}{V_{12}} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$

コンデンサの並列接続

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

コンデンサの直列接続

各平行平板コンデンサC_1、C_2、$\cdots C_n$の両電極の電荷をq、$-q$とする。

電極間電位差の和$V_{和}$

$$V_{和} = V_1 + V_2 + \cdots + V_n = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \cdots + \frac{q}{C_n}$$

合成容量C

$$V_{和} = \frac{q}{C}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{V_{和}}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

電気映像法

静電界は、境界の条件で定まる。もとの場合と同じ境界条件が成り立つような補助の電荷を想定し、置き換えることにより、もとの場合と同じ電界を得る方法

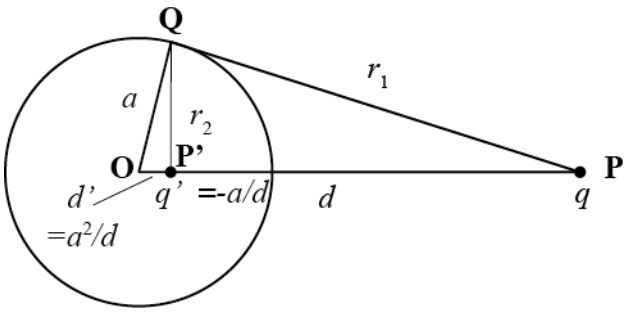
鏡像電荷

無限に広い導体表面からa離れた地点 A に点電荷q (>0)がある場合

点電荷と導体の表面電荷分布が作る電界$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$が存在

電界$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$は、地点 A の点電荷$q$と、導体表面に対して A と対称な鏡像の位置 A'に点電荷$-q$を置いた際の電界と等しい。

接地した導体球(中心 O, 半径a)の外部に点 P(点 O からの距離d)に点電荷q

映像電荷$q' = -\frac{a}{d}$

OP'の距離$d' = \frac{a^2}{d}$