ガウスの法則、静電界、電位

本日のポイント：電荷から出る電束が作る静電界、電位を表すガウスの法則を理解する。

電界の発散 (divergence of electric field)

電気力線 (electric lines of force)：電界のある空間で、任意の点の電界の方向と一致しするように引いた仮想的な線。電気力線の空間密度はその点の電界の大きさと等しい。

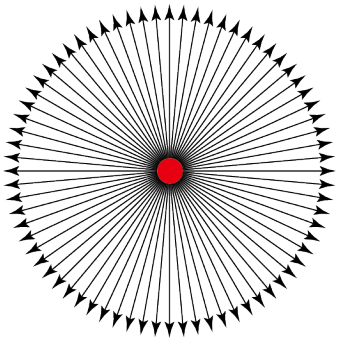
電荷q (C)から電気力線は、$\frac{q}{\varepsilon}$ (本)電気力線は出る。

電荷$-q$ (C)に電気力線は、$\frac{q}{\varepsilon}$ (本)電気力線は入る。

単位は、(C/(F/m))=(Vm)=(V/m)(m^2): 電界に面積をかけたもの

電束 (electric flux) $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$×(閉曲面の面積)：電気力線を定量的に表したもの。

1 (C)の正の電荷から 1 本発生する。



点電荷による電気力線　　２つの点電荷による電気力線　（異符号、同符号）

ガウスの法則 (Gauss' law)：閉じた曲面から出て行く電気力線の総数は、閉じた曲面の内部にある全電荷量を真空の誘電率で割ったものと等しい。

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = q_{内部} \text{ (C)}$$

自由空間中の 1 個の点電荷による電界（第 1 回）とガウスの法則

点電荷q を中心とする半径rの球面における電界Eは球面に垂直で大きさは、

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ (V/m)}$$

電気力線は単位面積当たりE(本)、球の表面積は$4\pi r^2$

$$4\pi r^2 \times E = \frac{q}{\varepsilon_0} \text{ (本)}$$

流速密度の場（ベクトル場）と流速

空間内に面を考え、裏と表を決める。

流速：裏から表に向かって単位時間に通り抜ける物質の量

流速密度ベクトル

$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ (m^{-2}s^{-1})

ただし、$\rho(\boldsymbol{r})$ は密度(m^{-3})、$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$は速度(m/s)

任意の大きさの閉曲面 S 全体を貫く流速Φは面を細かい区分に分け、

面素ベクトル$\Delta\boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}_i)\Delta S_i$をもつ$i$番目の区分の画素を貫く流速

$\Delta\Phi_i = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i$

の和の極限をとると

$$\Phi = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta\Phi_i = \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i = \oint_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot\Delta\boldsymbol{S}$$

電束密度 (electric flux density) $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$を流速密度ベクトルと考える

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\Delta\boldsymbol{S}$$

点電荷の周りの電束密度に対するガウスの法則

点電荷qが閉曲面 S 内にある場合

$$q = \oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\Delta\boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r = \frac{q\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}$$

電荷が閉曲面 S 内に無い場合

$$0 = \oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\Delta\boldsymbol{S}$$

自由空間中の１個の点電荷 qによる電界（第１回より）

クーロンの法則と電界の式より

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \quad \text{(V/m)}$$

点電荷の周りの電束密度に対するガウスの法則と比較すると

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \quad \text{(C/m}^2\text{)}$$

ε_0：真空の誘電率(F/m)

電束密度の重ね合わせの原理

複数の点電荷$q_1, q_2, \cdots q_n$,が点$\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \cdots \boldsymbol{r_n}$にあるとき、任意の点$\boldsymbol{r}$の電束密度

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^2} \boldsymbol{e}_{r-r_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_1(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3} \ (\mathrm{C/m^2})$$

閉曲面を貫く電束についてのガウスの法則

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot \Delta \boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n} \oint_S \frac{q_i \boldsymbol{e}_{r-r_i} \cdot d\boldsymbol{S}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^2} = \sum_{i(\mathrm{S\,内})} q_i = q_{内部}$$

$q_{内部}$は閉曲面 S の内部に含まれる電荷の総量

※物質中において成り立つ

$$\oint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \Delta \boldsymbol{S} = \sum_{i(\mathrm{S\,内})} \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{q_{内部}}{\varepsilon_0}$$

※真空中でのみ成り立つ。

電荷密度：３次元空間の連続関数

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta \boldsymbol{V} \to 0} \frac{\boldsymbol{q}}{\Delta \boldsymbol{V}} \ (\mathrm{C/m^3})$$

任意の領域 V 中の電荷q

$$q = \int_V \rho(\boldsymbol{r}) dV$$

電荷中性の法則：

通常の物体では外から帯電させない限り、原子核が担う正の電荷と電子が担う負の電荷が等量存在する。

電荷中性の法則が成り立つ物体では、全ての位置で$\rho(\boldsymbol{r}) = 0$ となる。

連続的電荷分布がある場合の電束密度、電界、ガウスの法則

電荷密度分布$\rho(\boldsymbol{r})$ (C/m^3)で分布している全ての電荷が点$\boldsymbol{r}$ に作る電束密度、電界

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{e}_{r-r'}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} dV' = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} dV' \ \ (\mathrm{C/m^2})$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{e}_{r-r'}}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} dV' = \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} dV' \ \ (\mathrm{V/m})$$

面積 S 上に面密度$\sigma(\boldsymbol{r})$ (C/m^2)で分布している全ての電荷が点$\boldsymbol{r}$ に作る電束密度、電界

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \int_S \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{e}_{r-r'}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} dS' = \int_S \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} dS' \ \ (\mathrm{C/m^2})$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int_S \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{e}_{r-r'}}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} dS' = \int_S \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} dS' \ \ (\mathrm{V/m})$$

曲線 l 上に線密度$\lambda(\boldsymbol{r})$ (C/m)で分布している全ての電荷が点$\boldsymbol{r}$ に作る電束密度、電界

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \int_l \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{e}_{r-r'}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} dl' = \int_l \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} dl' \ \ (\mathrm{C/m^2})$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int_l \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{e}_{r-r'}}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} dl' = \int_l \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} dl' \ \ (\mathrm{V/m})$$

静電界は保存場

$$\int_{r_0\,(\mathrm{C})}^{r_1} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{r_0\,(\mathrm{C})}^{r_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_0}\right) \ \ (\mathrm{V})$$

$\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{r} = dr$ (= $d\boldsymbol{r}$のr 方法成分)

途中の経路には依存しない(保存場)

静電界しか存在しない場合

$$\oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0 \ \ (\mathrm{V})$$

誘導電界を含むファラデーの電磁誘導の法則（第 1 回）

$$\oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S} \ \ (\mathrm{V})$$

静電ポテンシャル：電位

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{r_0}^{r_1} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \text{ (V)}$$

電界$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$の$\boldsymbol{r}_0$を基準とする静電ポテンシャル

原点に点電荷qがあるときの周りの静電ポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \text{ (V)}$$

無限遠$r_0 \to \infty$を基準にとると

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \text{ (V)}$$

点電荷q_1が原点ではなく、点r_1にあるとき、任意の点rの静電ポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} \text{ (V)}$$

重ね合わせの原理：複数の点電荷$q_1, q_2, \cdots q_n$が原点ではなく、点$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots \boldsymbol{r}_n$にあるとき、任意の点$\boldsymbol{r}$の静電ポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|} \text{ (V)}$$

連続的な電荷分布$\rho(\boldsymbol{r})$ (C/m^3)による静電ポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathrm{V}} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} dV' \text{ (V)}$$

面積 S 上に面密度$\sigma(\boldsymbol{r})$ (C/m^2)で分布している全ての電荷による静電ポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathrm{S}} \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} dS' \text{ (V)}$$

曲線 l 上に線密度$\lambda(\boldsymbol{r})$ (C/m)で分布している全ての電荷による静電ポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{l} \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} dl' \text{ (V)}$$

電位差

点$\boldsymbol{r}$ を基準とする点$\boldsymbol{r}'$の静電ポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{r}') - \phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{r}^{r'} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \text{ (V)}$$