

期末試験について

- 日時: 7月29日(金) 15:05～16:30 (85分)
- 手書きのA4用紙一枚のみ持ち込み可(印刷やコピーは不可)
 - これも採点の対象、試験終了後に回収します
- 本、ノート等の持ち込みは不可
- 座席はこちらで指定
- 試験内容:
 - 資源配分問題、ナップサック問題、巡回セールスマン問題
 - 財の交換、安定結婚問題
 - 証明、アルゴリズムの実行、用語の定義など
- 50点満点、29点以下は不合格(救済の可能性あり)

数理経済学
第11回
1対1マッチング（安定結婚問題）

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

安定結婚問題の定義

- n 人の「男性」(労働者)と n 人の「女性」(仕事)のマッチング
- 「男性」は「女性」に対する選好順序をもつ
- 「女性」は「男性」に対する選好順序をもつ
- 駆け落ちする男女のペアが生まれない(安定な)マッチングを
求めたい

選好リストとよぶ

例

男A:123

女1:BAC

男B:312

女2:BAC

男C:132

女3:CAB

割当の例:A-1, B-3, C-2

男性Aは女性1, 女性2, 女性3
の順に好き

女性1は男性B, 男性A, 男性C
の順に好き

男性Cは現在のパートナー(女性2)より女性3が好き

女性3は現在のパートナー(男性B)より男性Cが好き

→ 男性Cと女性3は駆け落ちする(割当は不安定)

安定マッチング

M : 「男性」と「女性」のマッチング

定義: 男女のペア (m, w) は(M に関する)

ブロッキングペア(駆け落ちペア) (m, w)

\leftrightarrow マッチング M において, m の相手 $< w$, w の相手 $< m$

定義: M は**安定マッチング** $\leftrightarrow M$ にブロッキングペアが存在しない

例

男A:123 女1:BAC

男B:312 女2:BAC

男C:132 女3:CAB

不安定な割当の例: A-2, B-3, C-1

定理 安定マッチングは常に存在

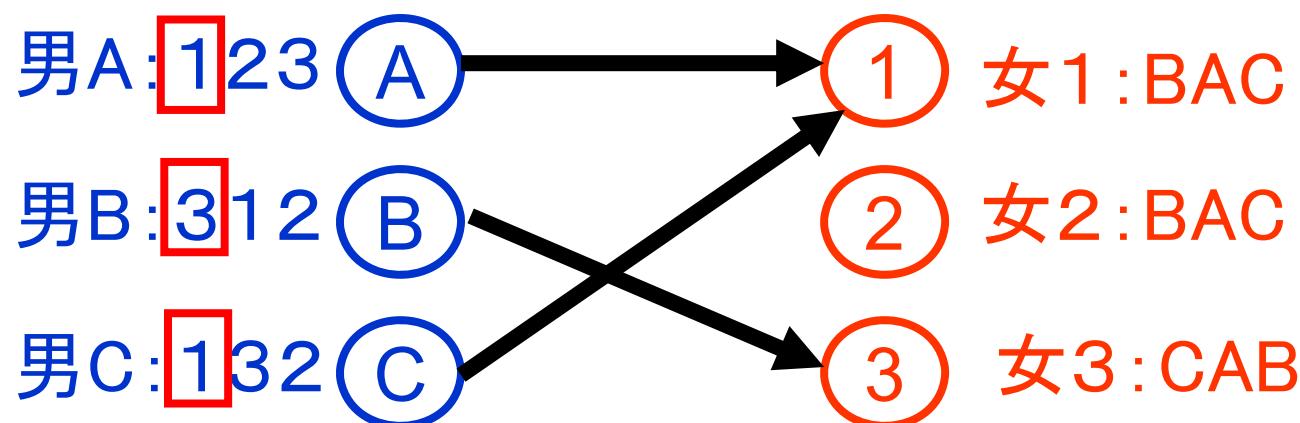
(証明の概略)受入保留(deferred acceptance)アルゴリズムにより, 安定マッチングが必ず得られる

受入保留アルゴリズム

提案者の名前を取ってゲイル・シャープレイアルゴリズムとも呼ばれる

- ・ 男性は女性に好みの順にプロポーズ
- ・ 女性はプロポーズしてきた男性の中から最良の男性を仮の相手とする

ステップ1：仮パートナーのいない男性は全員、
残りのパートナー候補のなかで最良の女性にプロポーズ

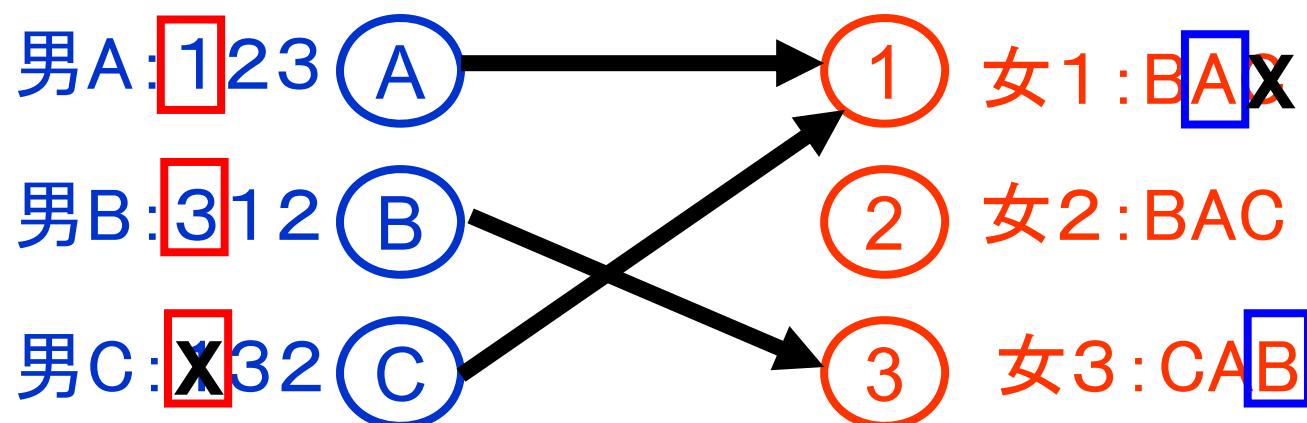


受入保留アルゴリズム

- ・ 男性は女性に好みの順にプロポーズ
- ・ 女性はプロポーズしてきた男性の中から最良の男性を仮の相手とする

ステップ2: プロポーズを受けた女性は全員、
プロポーズしてきた男性(および現在の仮パートナー)の中から
最良の男性を(新たな)仮パートナーとする。

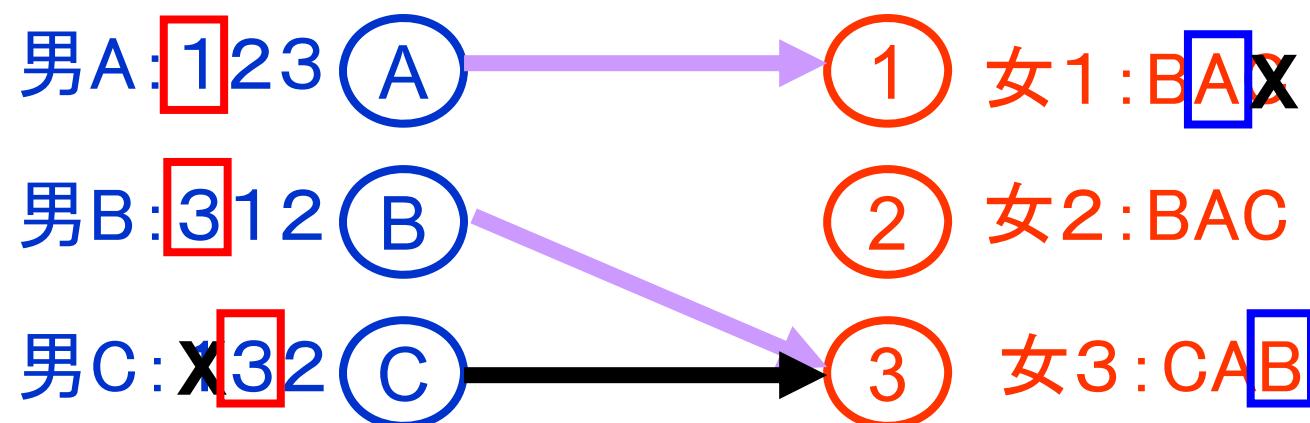
ステップ3: 全員に仮パートナーができたら終了。
いない人が存在する場合はステップ1へ。



受入保留アルゴリズム

- ・ 男性は女性に好みの順にプロポーズ
- ・ 女性はプロポーズしてきた男性の中から最良の男性を仮の相手とする

ステップ1：仮パートナーのいない男性は全員、
残りのパートナー候補のなかで最良の女性にプロポーズ

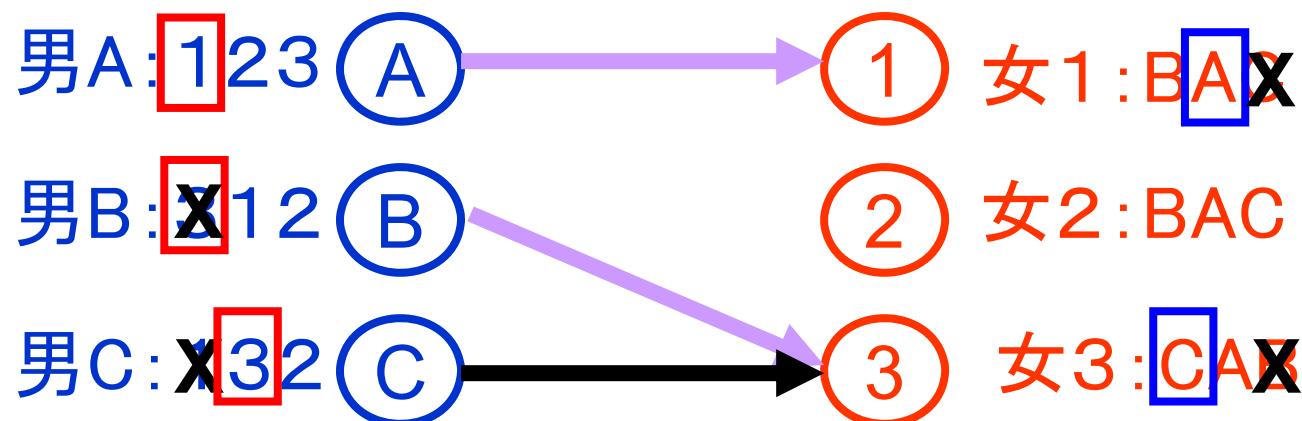


受入保留アルゴリズム

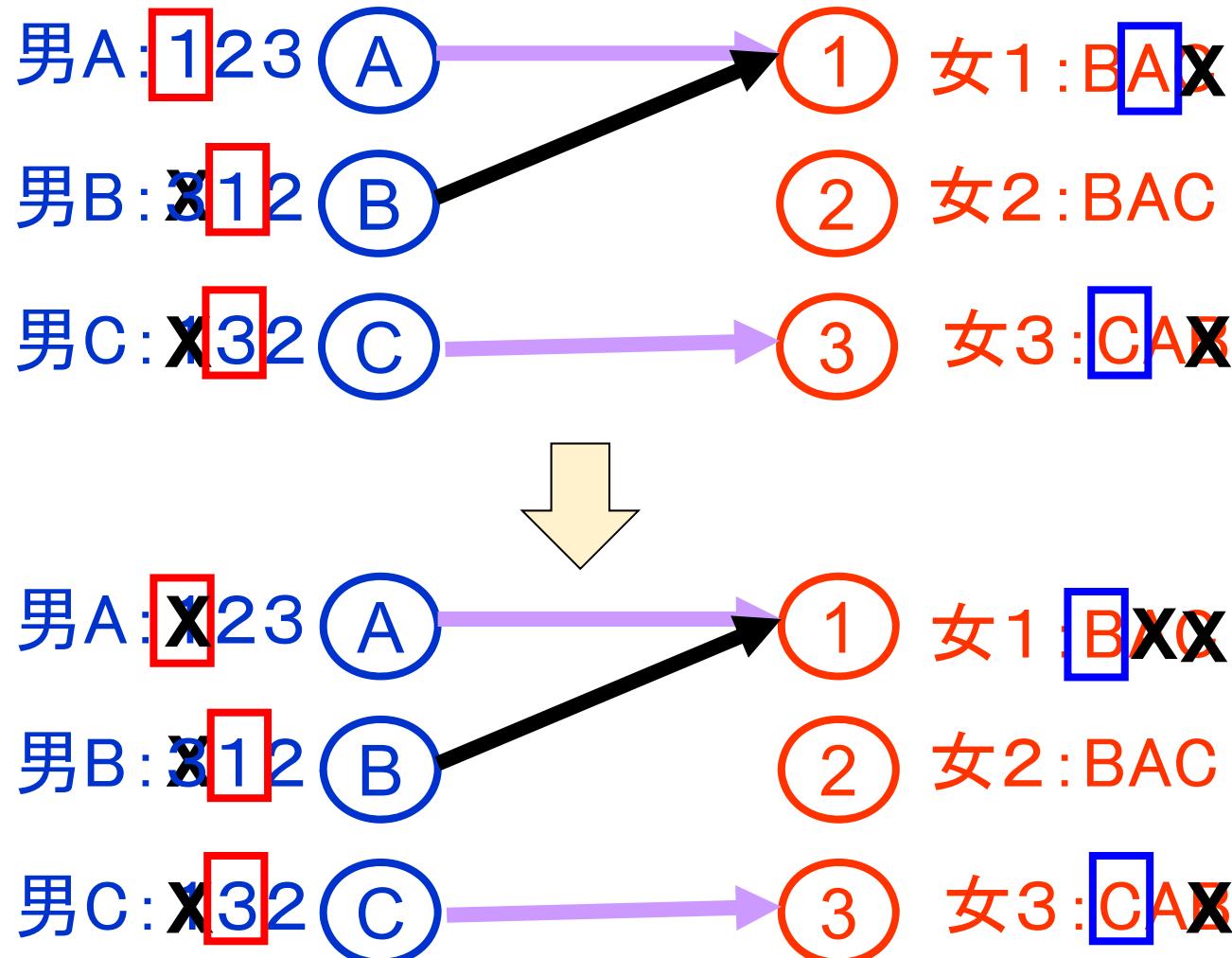
- ・ 男性は女性に好みの順にプロポーズ
- ・ 女性はプロポーズしてきた男性の中から最良の男性を仮の相手とする

ステップ2: プロポーズを受けた女性は全員、
プロポーズしてきた男性(および現在の仮パートナー)の中から
最良の男性を(新たな)仮パートナーとする。

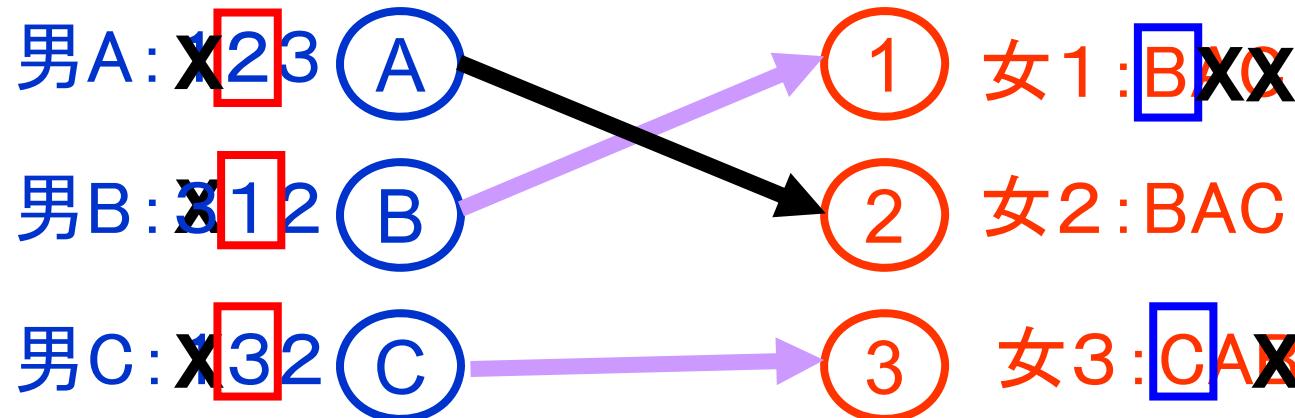
ステップ3: 全員に仮パートナーができたら終了。
いない人が存在する場合はステップ1へ。



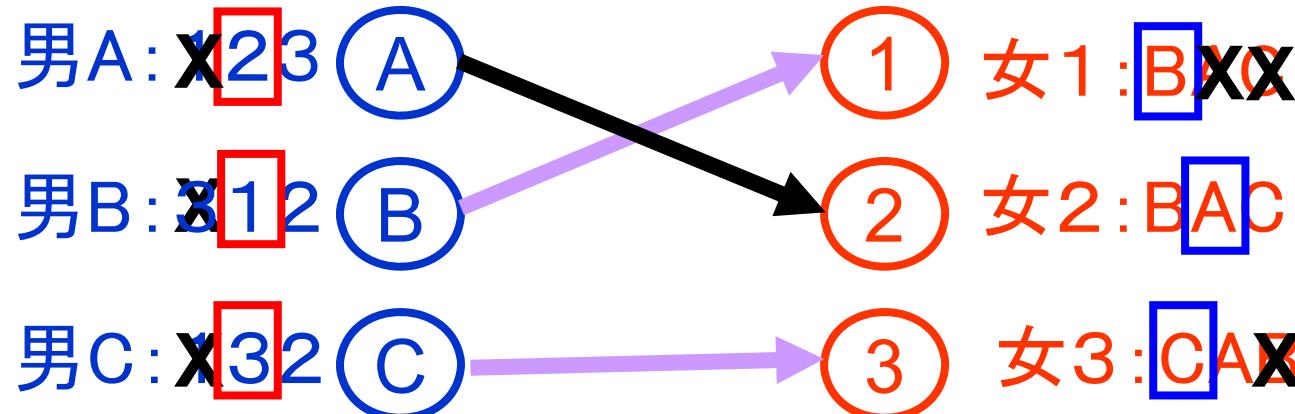
受入保留アルゴリズム



受入保留アルゴリズム



全員に仮パートナー
→終了



受入保留アルゴリズムの解の安定性

定理 (a) 受入保留アルゴリズムは必ず男女全員のマッチングを求める.
(b) さらに、そのマッチングは安定である.

((a)の証明)

- 各女性は、一度誰からプロポーズされる → 以降は常に仮パートナーがいる
- 背理法で証明：アルゴリズム終了時に、ある男性 m のパートナーがないと仮定
→ m はすべての女性にプロポーズしているはず
→ すべての女性は仮パートナーがいて、仮パートナーは全て異なる男女数は等しいので、男性全員にパートナーがいるはず（矛盾）

受入保留アルゴリズムの解の安定性

定理 (a) 受入保留アルゴリズムは必ず男女全員のマッチング M を求める.
(b) さらに、そのマッチング M は安定である。

((b)の証明)

- ブロッキングペアが存在しないことを示せば良い。
 - ブロッキングペア(駆け落ちペア) (m, w)
 マッチング M において、 m の相手 $< w$, w の相手 $< m$
- 各男性 m は、最も好きな女性から順番にプロポーズ
 →拒否されたら2番目、3番目、... とプロポーズ
 $\therefore m$ の最終的なパートナーより好きな女性 w がいたら、
 m は w から既に拒否されているはず
 → w が拒否したときの仮パートナー $m' > m$ が成立
 w には、 m' より好きな男性 m'' がパートナーとなっているはず
 $\therefore m'' > m' > m$ より、ブロッキングペアは存在しない

安定マッチングの最適性

- 安定マッチングは複数存在しうる

男A: 1 2 3 — 女1: B C A
 男B: 2 3 1 — 女2: C A B
 男C: 3 1 2 — 女3: A B C

男A: 1 2 3 — 女1: B C A
 男B: 2 3 1 — 女2: C A B
 男C: 3 1 2 — 女3: A B C

- 男性, 女性, それぞれにとて最良な安定マッチングが必ず存在

男性最適安定マッチング

定理 次の条件を満たす安定マッチング M が必ず存在する:

任意の安定マッチング M' および任意の男性 m に対し,
 M' における m のパートナー $\leq M$ における m のパートナー

女性最適安定マッチング

系 次の条件を満たす安定マッチング M が必ず存在する:

任意の安定マッチング M' および任意の女性 w に対し,
 M' における w のパートナー $\leq M$ における w のパートナー

安定マッチングの最適性

- ・男性最適安定マッチングは、女性に対して最悪の安定マッチング

定理 男性最適安定マッチング M に対し、以下が成り立つ：

任意の安定マッチング M' および任意の女性 w に対し、

M' における w のパートナー $\geq M$ における w のパートナー

(証明) 以下では女性 w を固定して考える。

ある安定マッチング M' が存在して、

M' における w のパートナー $m' < M$ における w のパートナー m と仮定。

マッチング M' において (m, w) は

- ・ペアになっていない
- ・ w は M' におけるパートナー m' より m が好き
- ・ m にとって w は(安定マッチングという条件下で)最良の相手
 $\rightarrow m$ は M' におけるパートナーより w が好き

$\therefore (m, w)$ はブロッキングペア $\rightarrow M'$ は安定マッチングではない(矛盾)

受入保留アルゴリズムの最適性

定理 受入保留アルゴリズムにより得られる
安定マッチングは男性最適である

(証明の概略)

以下を証明すれば良い:

アルゴリズムにおいて、男性 m が女性 w に拒否された
→ m と w がペアになる安定マッチングは存在しない
(帰納法で証明できる)

つまり、 m を受け入れてくれた女性が、「一番良い」パートナー

系 受入保留アルゴリズムにおいて男女の立場を入れ替えたとき、
最終的に得られる安定マッチングは女性最適である

安定結婚問題の拡張

- ・その1：男女数が異なる場合
- ・その2：独身を許す（パートナーにしたくない異性を考慮）
- ・その3：同順位を許す
- ・その4：1対多マッチング（1つの仕事に複数の労働者を割り当てる）

問題の拡張1：男女の人数が異なる

・パートナーのいない男女が出てくる

→ブロッキングペアの定義を変更する必要性

定義：男女のペア (m, w) は(マッチング M に関する)

ブロッキングペア(駆け落ちペア) (m, w)

$\Leftarrow \Rightarrow$ (i) M において m と w はペアになっていない

(ii) m は M において相手がない, もしくは相手より w を好む

(iii) w は M において相手がない, もしくは相手より m を好む

定義： M は**安定マッチング** $\Leftarrow \Rightarrow M$ にブロッキングペアが存在しない

例

男A:12

女1:CBA

男B:12

女2:BCA

男C:21

マッチング A-1, C-2

に対し, (B,1)はブロッキングペア

- Bは相手がない

- 1はAよりBが好き

問題の拡張1：男女の人数が異なる

男女同数の場合と同様に、下記の結果が得られる

定理 男女の人数が異なる場合でも、受入保留アルゴリズムにより安定マッチングが得られる

定理 (i) 男性が少ない場合、安定マッチングにおいて男性全員が相手をもつ
(ii) 男性が多い場合、どの安定マッチングにおいても、相手をもつ男性のグループは等しい

例

男A: 12	女1: CBA
男B: 12	女2: BCA
男C: 21	

男A: 12	女1: CBA
男B: 12	女2: BCA
男C: 21	

2種類の安定マッチング。どちらにおいても男Aはパートナーなし

問題の拡張2：独身を許す

- 「嫌な異性とペアになるより独りがよい」という選択を認める
- つまり、「ペアになんてても良い」異性についてのみ順序をつける

男A: 123

女1:BAC

マッチング C-1, B-3

男B: 231

女2:C

に対し, (A, 1)はブロッキングペア

男C: 13

女3:AB

- Aは相手がない
- 1はCよりAが好き

定義：男女のペア (m, w) は(マッチング M に関する)

ブロッキングペア(駆け落ちペア) (m, w)

- \leftrightarrow (i) M において m と w はペアでなく,かつペアになんてても良い
(ii) m は M において相手がない,もしくは相手より w を好む
(iii) w は M において相手がない,もしくは相手より m を好む

問題の拡張2：独身を許す

これまでの場合と同様に、下記の結果が得られる

定理 独身を許す場合でも、受入保留アルゴリズムにより
安定マッチングが得られる
(ペアになれない男性は、プロポーズしても直ちに却下)

定理 どの安定マッチングにおいても、
相手をもつ男性のグループ・もたない男性のグループ
相手をもつ女性のグループ・もたない女性のグループ
は等しい

男A: **1**23
男B: 2**3**1
男C: 13

女1: B**A**C
女2: C
女3: A**B**

男A: 12**3**
男B: 23**1**
男C: 13

女1: **B**A**C**
女2: C
女3: **A**B

演習問題(レポートは今回が最後)

問1: 右の安定結婚問題の例に
受入保留アルゴリズムを適用して
安定マッチングを求めよ.
計算過程も書くこと.

(ヒント: 各男性のパートナーは
第1または第2希望になる)

男A:2413	女1:BADC
男B:3142	女2:DCAB
男C:2314	女3:ADCB
男D:4132	女4:BADC

問2: 右の安定結婚問題の例において,
男女の立場を入れ替えて受入保留アルゴリズムを適用して,
安定マッチングを求めよ.
計算過程も書くこと.
(ヒント: 各女性のパートナーは第1または第2希望になる)