# 数理経済学
# 第7回
# 資源配分問題

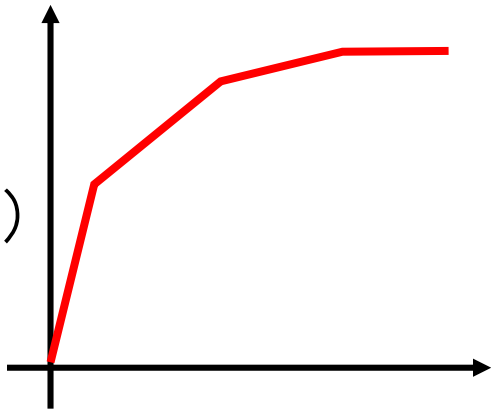
塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

# 今後の予定

- 7月12日 中間試験
- 7月15日 授業
- 7月19日 授業
- 7月22日 授業
- 7月26日 授業
- 7月29日 期末試験
- 8月2日，5日 休講
- 8月9日 期末試験の解説（希望者のみ）

# 単純な資源配分問題

# 単純な資源配分問題：定式化



- n 人の子供に r 個のリンゴを配分
  - 配分単位は整数（リンゴを切り分けることは不可）
- 全員の満足度の合計値を最大にしたい
  - 1個あたりの満足度は単調非増加
    （1個目の嬉しさ≧2個目の嬉しさ≧3個目の嬉しさ≧．．．）

定式化：

最大化 $\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$　条件 $\sum_{i=1}^{n} x_i = r,\ x_i \geq 0$, 整数 $(\forall i = 1, \ldots, n)$

$g_i(t)$: 子供 i の満足度関数

仮定: 差分 $g_i(t+1) - g_i(t)$ は t に関して単調非増加

(離散)凹関数
とよぶ

# 単純な資源配分問題の例1

- リンゴの適切な配分 $x_i$ と価格 p を決めたい（均衡配分，均衡価格）
- 条件： $\sum_{i=1}^{n} x_i = r,\ x_i \geq 0$, 整数

  各 i に対し，配分 $x_i$ のときに「実質的な満足度」が最大

  $$g_i(x_i) - px_i = \max\{g_i(y_i) - py_i | 0 \leq y_i \leq r\}$$

資源配分問題を解くと，均衡配分，均衡価格が簡単に計算できる

**定理**

資源配分問題の最適解$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$は均衡配分.

$$p = \min\{g_i(x_i) - g_i(x_i - 1) | 1 \leq i \leq n,\ x_i > 0\}$$

とすると，均衡価格.

証明は後で

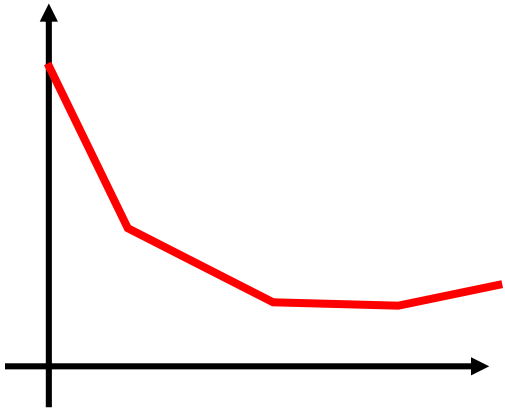
# 単純な資源配分問題:最小化版

- 目的関数を −1倍すると最小化問題

最小化 $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ 条件 $\sum_{i=1}^{n} x_i = r,\ x_i \geq 0$, 整数 $(\forall i = 1, \ldots, n)$

$f_i(t)$: 差分 $f_i(t+1) - f_i(t)$ は t に関して単調非減少

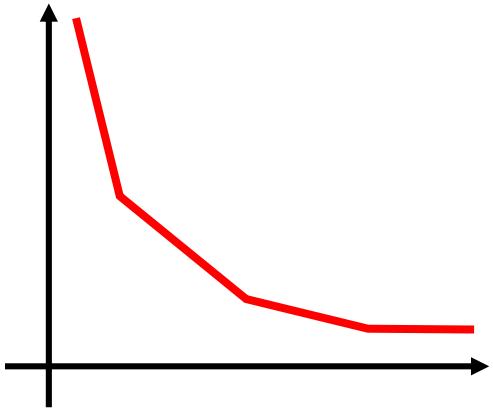
(離散)凸関数
とよぶ



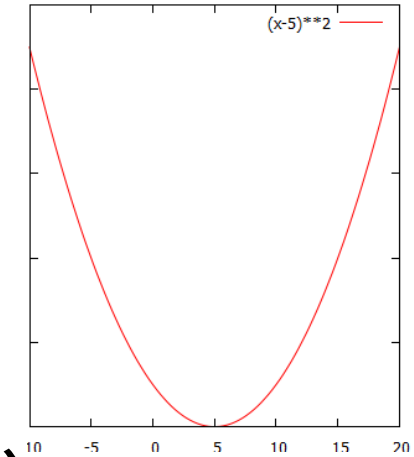
# 単純な資源配分問題の例2

- n 個の作業（ジョブ）に労働資源（労働者，CPU，材料など）を配分
- 処理時間の和を最小化したい
  - 作業 i の処理時間 $f_i(x_i)$ は離散凸
    （ひとつの作業に大勢の人が携わっても効率は上がらない）

最小化 $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$　条件 $\sum_{i=1}^{n} x_i = r,\ x_i \geq 0$, 整数 $(\forall i = 1, \ldots, n)$



# 単純な資源配分問題の例3




議員定数配分問題

- 国会などの議員総数→各選挙区に配分
- 選挙区数= n, 議員定数= r
- 第 i 選挙区の人口 p(i) に比例した議席数を配分したい
  - 理想：選挙区の人口に比例した議席数 $r \times p_i / \sum_j p_j$
  - 理想値の実現は無理➔なるべく近い値にする

最小化 $\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{x_i}{p_i} - \frac{r}{\sum_j p_j} \right)^2$

条件 $\sum_{i=1}^{n} x_i = r,\ x_i \geq 0$, 整数 $(\forall i = 1, \ldots, n)$

目的関数を $\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{x_i}{p_i} - \frac{r}{\sum_j p_j} \right|$ に変更しても可

# 単純な資源配分問題のアルゴリズム

# 貪欲アルゴリズム

貪欲アルゴリズム：目的関数値が最も増えるように，追加配分する

ステップ０：$(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$とする.
ステップ１：$\sum_{i=1}^{n} x_i = r$ ➔ $(x_1, \dots, x_n)$ を出力して終了.
ステップ２：$g_i(x_i + 1) - g_i(x_i)$ が最大の i に対し $x_i$ を1増やす.
ステップ1に戻る.

アルゴリズムの正当性の証明は後ほど

# 貪欲アルゴリズム：実行例

最大化 $-(2x_1-1)^2-(3x_2-2)^2-3x_3^2$
条件 $x_1+x_2+x_3=6, x_i \geq 0$, 整数

表を最初に書くとわかりやすい（手計算の場合）

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $g_i(0)$ | -1 | -4 | 0 |
| $g_i(1)$ | -1 | -1 | -3 |
| $g_i(2)$ | -9 | -16 | -12 |
| $g_i(3)$ | -25 | -49 | -27 |
| $g_i(4)$ | -49 | -100 | -48 |

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $g_i(1)-g_i(0)$ | 0 | 3 | -3 |
| $g_i(2)-g_i(1)$ | -8 | -15 | -9 |
| $g_i(3)-g_i(2)$ | -16 | -33 | -15 |
| $g_i(4)-g_i(3)$ | -24 | -51 | -21 |

x2→x1→x3→x1→x3→x2 or x3
の順に1ずつ増やしていく

# 最適解の性質

# 最適解の条件

以降では，最大化版の問題を考える

- 解 $(x_1, \ldots, x_n)$ において，あるj, k に対し $x_j$ を1増やし，$x_k$ を1減らすと目的関数が増加➔解 $(x_1, \ldots, x_n)$ は最適ではない
- [対偶] 解 $(x_1, \ldots, x_n)$ は最適➔任意の j, k に対し，
  $x_j$ を1増やし，$x_k$ を1減らしても目的関数は非増加

実は逆も成り立つ

**定理**
資源配分問題の実行可能解$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$は最適解
🡐➔任意の異なる j, k に対し，
$x_j$ を1増やし，$x_k$ を1減らしても目的関数は非増加

# 最適解の条件：証明

「任意の異なる j, k に対し，$x_j$ を1増やし，$x_k$ を1減らしても目的関数は非増加

➔最適解」を示す

- $(x_1^*, \dots, x_n^*)$: 最適解の中で，$\sum_{i=1}^{n} |x_i^* - x_i|$ 最小
- $(x_1^*, \dots, x_n^*) = (x_1, \dots, x_n)$ならば証明終わり.
- よって$(x_1^*, \dots, x_n^*) \neq (x_1, \dots, x_n)$ と仮定，矛盾を導く

➔$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{i=1}^{n} x_i$ なので，ある j, k に対して$x_j^* > x_j$，$x_k^* < x_k$ 成立

- $(x_1, \dots, x_n)$に関する仮定より，$g_j(x_j + 1) + f_k(x_k - 1) \leq f_j(x_j) + f_k(x_k)$

➔ $f_j(x_j + 1) - f_j(x_j) \leq f_k(x_k) - f_k(x_k - 1)$ （式A）

- $x_j^* > x_j$，$x_k^* < x_k$と，$f_j, f_k$ の離散凹性より，

$f_j(x_j^*) - f_j(x_j^* - 1) \leq f_j(x_j + 1) - f_j(x_j)$ （式B）

$f_k(x_k^* + 1) - f_k(x_k^*) \geq f_k(x_k) - f_k(x_k - 1)$ （式C）

- 式A,B,Cより $f_j(x_j^*) - f_j(x_j^* - 1) \leq f_k(x_k^* + 1) - f_k(x_k^*)$

➔ $f_j(x_j^* - 1) + f_k(x_k^* + 1) \geq f_j(x_j^*) + f_k(x_k^*)$

∴ $x_j^*$を1増やし，$x_k^*$を1減らした解もまた最適解➔$\sum_{i=1}^{n} |x_i^* - x_i|$ 最小に矛盾

# 最適解の条件2

**定理**
資源配分問題の実行可能解$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$は最適解
←→任意の異なる j, k に対し,
$x_j$ を1増やし, $x_k$ を1減らしても目的関数は非増加

⇒ 任意の j, k に対し, $g_j(x_j+1) - g_j(x_j) \leq g_k(x_k) - g_k(x_k - 1)$

$\therefore \max_j\{g_j(x_j+1) - g_j(x_j)\} \leq \min_k\{g_k(x_k) - g_k(x_k - 1)\}$

新たな追加による増加分の最大値　これまでの追加による増加分の最小値

よって, $\max_j\{g_j(x_j+1) - g_j(x_j)\} \leq p \leq \min_k\{g_k(x_k) - g_k(x_k - 1)\}$
なる実数 p に対し,
最適解は $g_i(t+1) - g_i(t) \geq p$ なる $g_i(t+1) - g_i(t)$ を
r 個集めたもの
($g_i(t+1) - g_i(t) > p$ の場合, 必ず選ぶ.
$g_i(t+1) - g_i(t) < p$ の場合, 選ばない)

⇒ 貪欲アルゴリズムの正当性

# 最適解の条件2

前のスライドで述べたことをまとめると，以下の通り：

**定理**　資源配分問題の実行可能解$(x_1, x_2, \dots, x_n)$は最適解
⟺ある実数 p が存在して，

$$g_i(t) - g_i(t-1) > p \Rightarrow x_i \geq t$$
$$g_i(t+1) - g_i(t) < p \Rightarrow x_i \leq t$$

また，そのような p は次式を満たす：

$$\max_j \{g_j(x_j + 1) - g_j(x_j)\} \leq p \leq \min_k \{g_k(x_k) - g_k(x_k - 1)\}$$

上記の p に対して以下が成立：

$$g_i(x_i) - px_i = \max\{g_i(y_i) - py_i | 0 \leq y_i \leq r\}$$

∴ 均衡価格に対応

# 関連する問題の最適解との関係

- k=0,1,…,r に対し，次の問題($P_k$)を考える
  - 問題($P_r$) ＝ 元の資源配分問題そのもの

($P_k$) 最大化$\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$ 条件 $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$, $x_i \geq 0$, 整数 $(\forall i = 1, \dots, n)$

問題($P_k$)の最適解から，問題($P_{k+1}$)の最適解が簡単に計算可能

**定理**
整数k (0≦k<r)，$(x_1, x_2, \dots, x_n)$は($P_k$)の最適解
j (1≦j≦n) は$g_j(x_j + 1) - g_j(x_j)$の値が最大
➔ $x_j$ を1増やすと，問題($P_{k+1}$)の最適解になる

⇒ 貪欲アルゴリズムの正当性

[証明の概略] $(x_1', \dots, x_n')$: $(x_1, \dots, x_n)$ の$x_j$ を1増やしたベクトル
$(x_1^*, \dots, x_n^*)$: ($P_{k+1}$)の最適解の中で，$\sum_{i=1}^{n} |x_i^* - x_i'|$ 最小
$(x_1^*, \dots, x_n^*) = (x_1', \dots, x_n')$ならば証明終わり.
よって$(x_1^*, \dots, x_n^*) \neq (x_1', \dots, x_n')$ と仮定，矛盾を導く

# 様々な制約下での資源配分問題

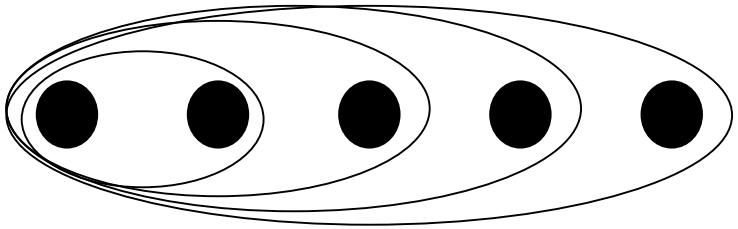
# 様々な制約

以下の制約を追加しても，貪欲アルゴリズムで最適解が得られる

- 上界制約：各変数の上界$x_i \leq u_i$　（$u_i$：非負整数）
  - 例：各選挙区の議席数の上限
  - $\sum_{i=1}^{n} u_i \geq r$ ならば実行可能解が存在
- 一般上界制約：{1,2,…,n} を分割した集合$X_1, X_2, \ldots, X_m$に対し，

$$\sum_{i \in X_j} x_i \leq u_j \ (j = 1,2,\ldots,m) \ (u_j：非負整数)$$

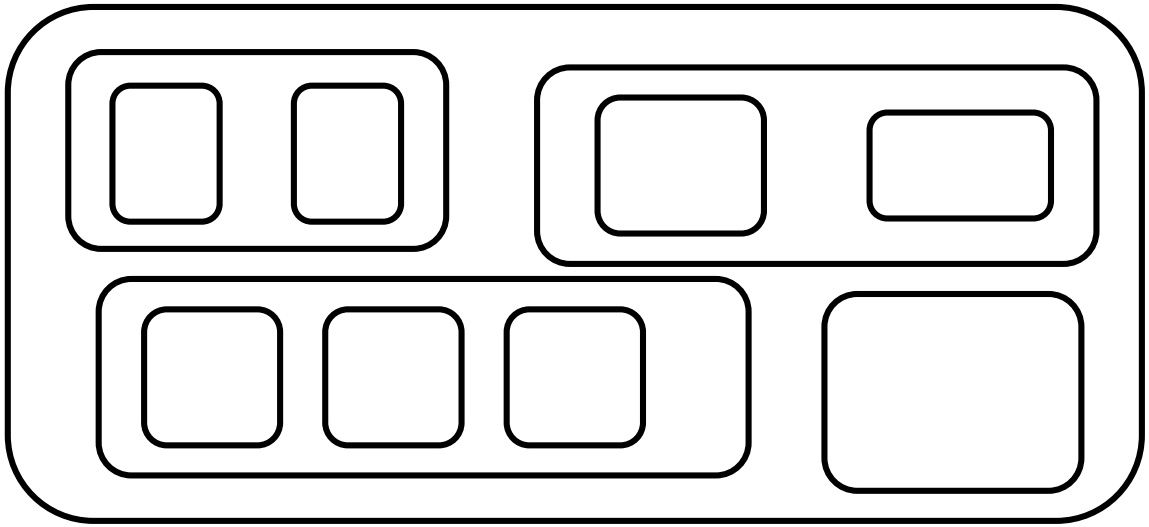
  - 例：あるエリアの選挙区全体に割り当てられる議席数の上限
  - $\sum_{j=1}^{n} u_j \geq r$ ならば実行可能解が存在
- 入れ子制約：$\sum_{i=1}^{j} x_i \leq u_j \ (j = 1,2,\ldots,n-1)$ ($u_j$：非負整数)
  - 例：第1期から第j期の間に消費する労働資源の上限



# 木制約

- 木制約：$X_j \cap X_k = \emptyset$または$X_j \subseteq X_k$または$X_j \supseteq X_k$を満たす集合$X_1, X_2, \ldots, X_m \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$に対し，

$$\sum_{i \in X_j} x_i \leq u_j \ (j = 1,2,\ldots,m)$$



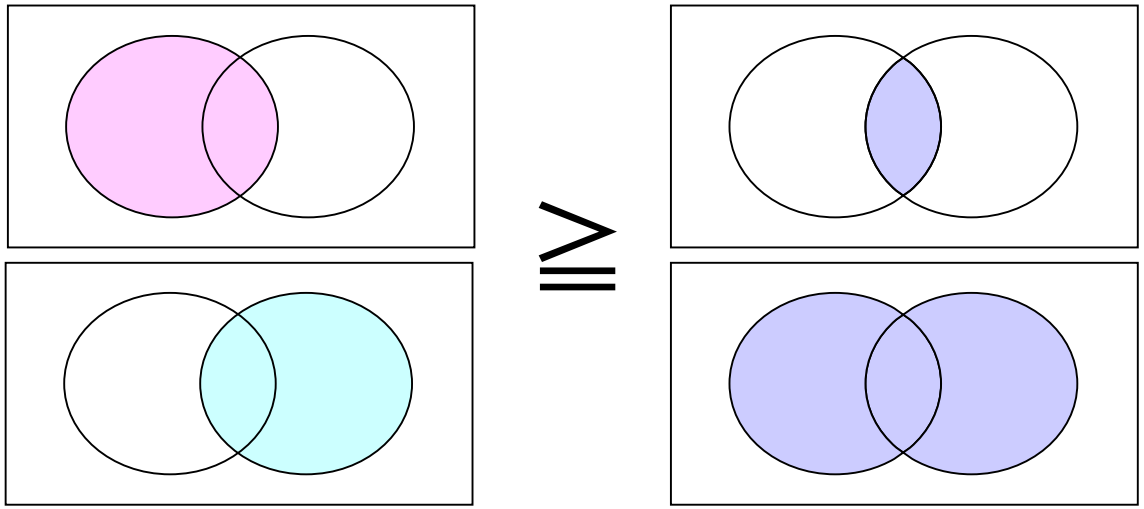
イメージ

- 各市町村への資源配分量の上限
- 各都道府県の市町村への資源配分量の合計値の上限
- 国内の各地域（東北，関東，など）への資源配分量の合計値の上限

# 劣モジュラ制約

これまで紹介した制約は，劣モジュラ制約の特殊ケース

$N = \{1,2,\dots,n\}$ とおく



劣モジュラ制約：

条件 $\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cap Y) + \rho(X \cup Y) \ \ (\forall X, Y \subseteq N)$ を満たす

$\rho(X) \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ $(X \subseteq \{1,2,\dots,n\})$ に対し，

$$\sum_{i \in X} x_i \leq \rho(X) \ \ (\forall X \subseteq N)$$

制約の具体例：

$x_1 + x_2 \leq 5,\ x_2 + x_3 \leq 3,\ x_2 \leq 1,\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$

# 劣モジュラ制約に対する貪欲アルゴリズム

劣モジュラ制約下での資源配分問題に対しても,
貪欲アルゴリズムが適用可能

ステップ0: $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$とする.
ステップ1: $\sum_{i=1}^{n} x_i = r$ ➔ $(x_1, \dots, x_n)$ を出力して終了.
ステップ2: $S = \{i | 1 \le i \le n, x_i$を1増やしても制約が満たされる$\}$ とおく.
$g_i(x_i + 1) - g_i(x_i)$ が最大の $i \in S$ に対し, $x_i$ を1増やす.
ステップ1に戻る.

正当性の証明は難しいので省略

# 劣モジュラ制約に対する貪欲アルゴリズム:実行例

最大化 $-(2x_1-1)^2-(3x_2-2)^2-3x_3^2$
条件 $x_1+x_2+x_3=6, x_i \geq 0$, 整数
$x_1+x_2 \leq 5,\ x_2+x_3 \leq 3,\ x_2 \leq 1$

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $g_i(0)$ | -1 | -4 | 0 |
| $g_i(1)$ | -1 | -1 | -3 |
| $g_i(2)$ | -9 | -16 | -12 |
| $g_i(3)$ | -25 | -49 | -27 |
| $g_i(4)$ | -49 | -100 | -48 |

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $g_i(1)-g_i(0)$ | 0 | 3 | -3 |
| $g_i(2)-g_i(1)$ | -8 | -15 | -9 |
| $g_i(3)-g_i(2)$ | -16 | -33 | -15 |
| $g_i(4)-g_i(3)$ | -24 | -51 | -21 |

x2→x1→x3→x1→x3→x1
の順に1ずつ増やしていく

# 演習問題（提出は中間試験の次回）

問１：スライド「貪欲アルゴリズム：実行例」に出てきた資源配分問題を考える．解$(x_1, x_2, x_3) = (3,2,1)$に対し，ある変数を1増やし，別の変数を1減らすと，目的関数値が増えることを具体的に示せ．

問２：議員定数配分問題を考える．
選挙区の数＝３，各選挙区の人口が100, 300, 600 の町で5議席を配分する．最適な配分を貪欲アルゴリズムにより計算せよ．
目的関数が (i) 自乗和の場合，(ii) 絶対値の和の場合，それぞれについて計算せよ．