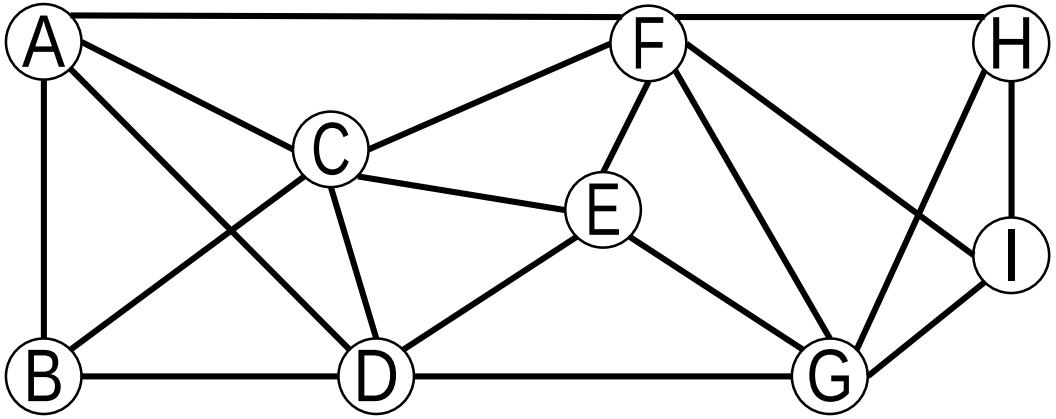
数理経済学
第2回
最小全域木問題

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

グラフ

最小全域木問題を数学的に表現するために使う

- 定義：グラフ＝「丸」を「線」で結んだ図
  - 頂点＝「丸」，枝＝「線」



グラフの例
- 友人関係の図
- 鉄道路線図，道路網
- 組織図，家系図

※数学的には，
グラフ$G = (V, E)$は全頂点の集合V と全枝の集合E の対として表現
各枝$(u, v) \in E$は頂点の対として表現

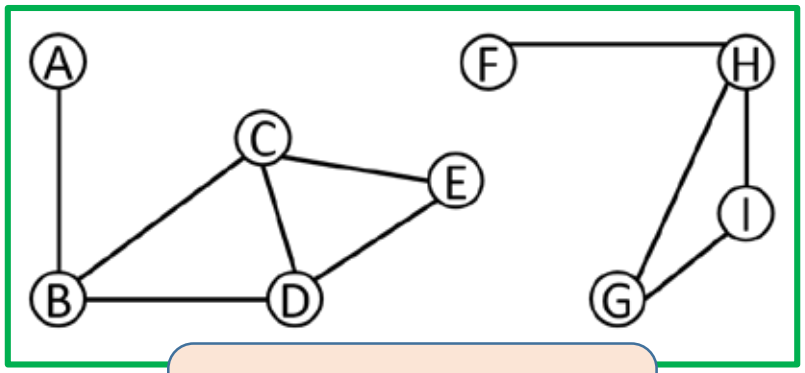
上記のグラフの場合，
すべての頂点の集合$V = \{A, B, C, \dots, H, I\}$
すべての枝の集合$E = \{(A, B), (B, C), (C, D), (B, D) \dots\}$

グラフの全域木

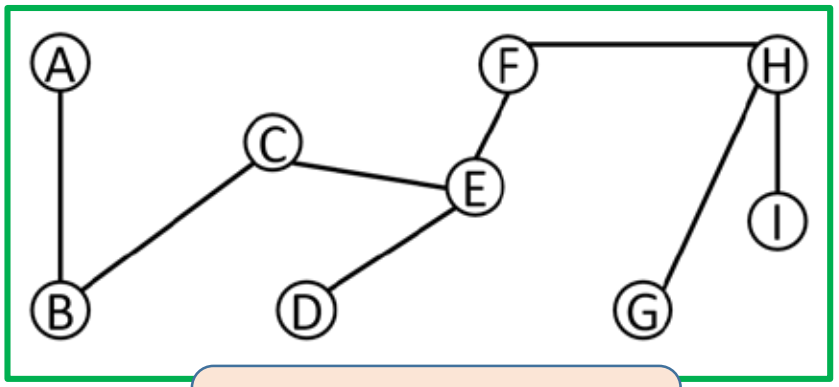
定義：全域木＝次の条件を満たす枝の部分集合 T

(i) グラフ (V, T) は連結　　(ii) 枝集合 T は閉路を含まない

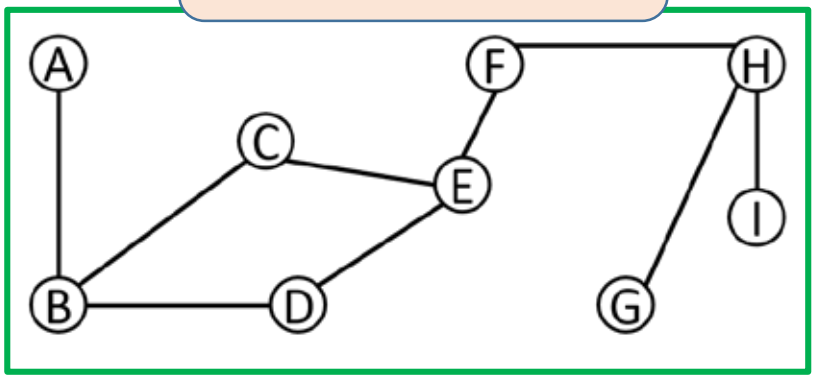
(つまり，全域木 -- 無駄のないネットワークのこと)

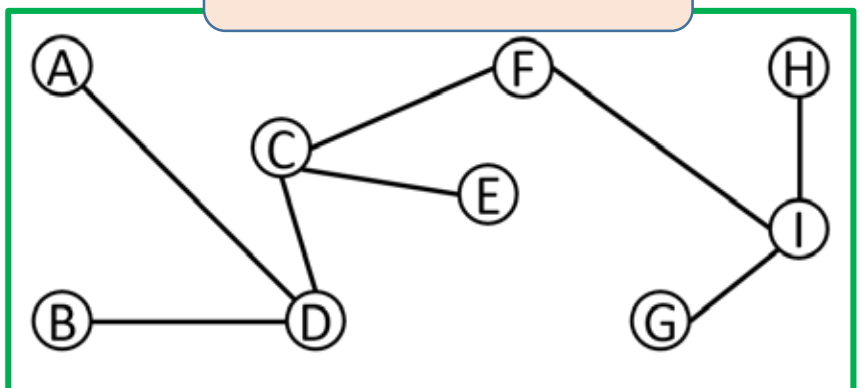


全域木ではない



全域木である





全域木の特徴付け

定義：**全域木**＝次の条件を満たす枝の集合 T

(i) グラフ (V, T) は連結　　(ii) 枝集合 T は閉路を含まない

定理: グラフGの任意の枝集合 $T \subseteq E$ に対し，以下の条件は等価

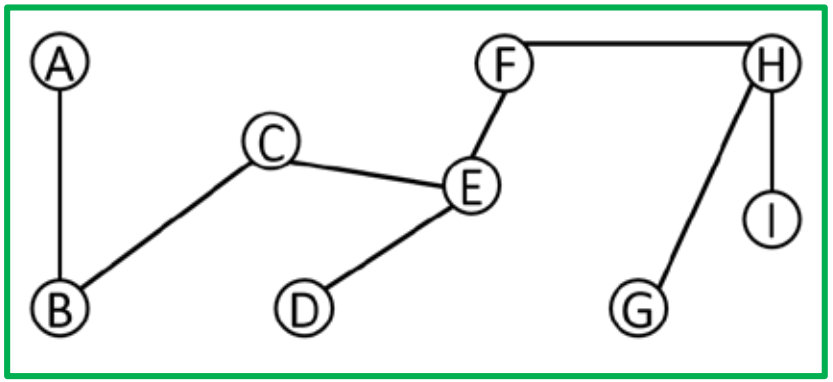
(1) T は全域木

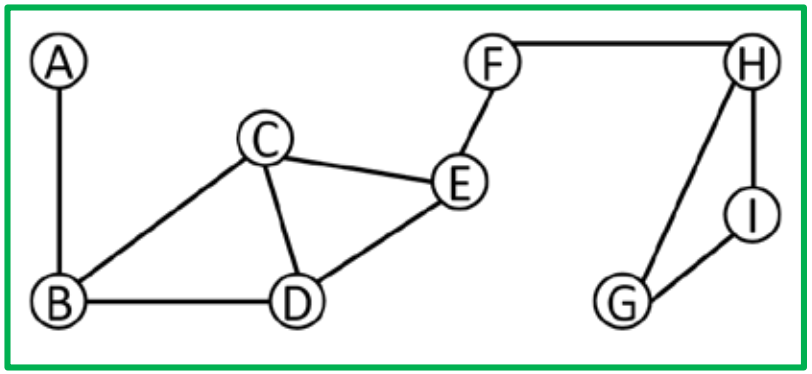
(2) (V, T) の任意の2頂点の間に路はただ1つ存在

(3) (V, T) は連結，ただし T から任意の枝を削除すると非連結

(4) |T| = |V| - 1, かつグラフ (V,T) は連結

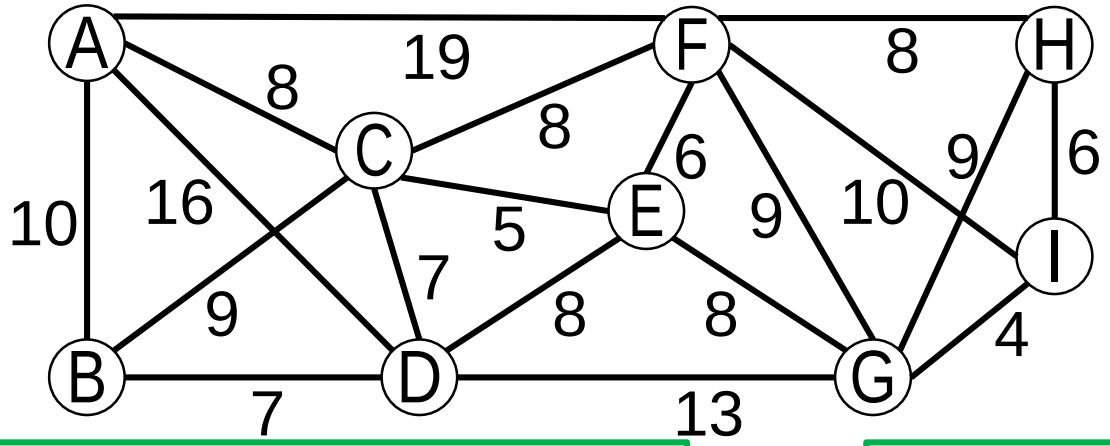
(5) |T| = |V| - 1, かつ T は閉路を含まない



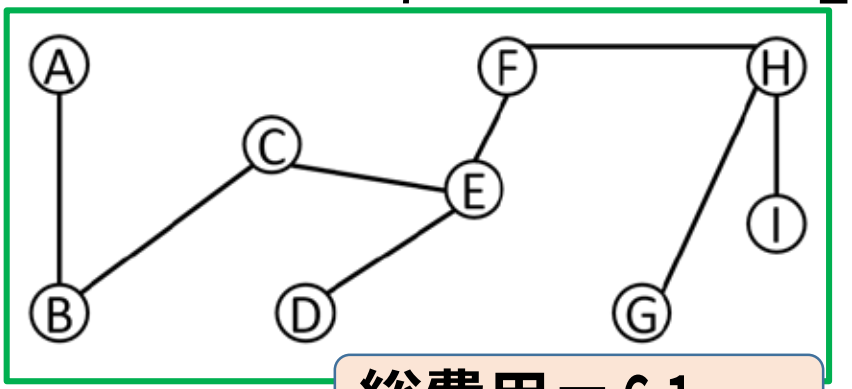


最小全域木問題

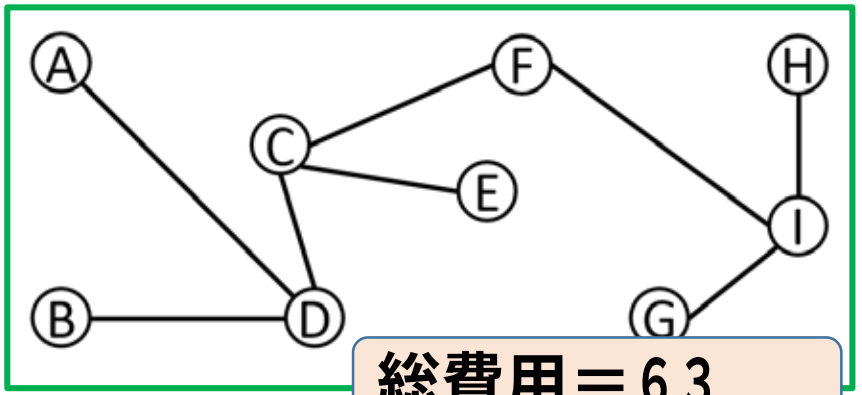
- 大学内の通信用ネットワークを構築したい
  - ケーブル(u,v)の設置には費用c(u,v) > 0が必要
  - 通信可能なネットワークを，出来るだけ最小費用でつくりたい
    è 費用の和が最小の全域木を求める問題 (**最小全域木問題**)



各ケーブルの設置費用



総費用＝６１

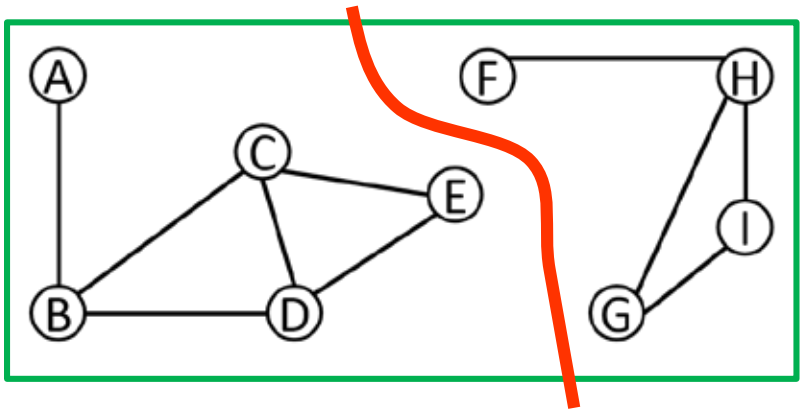


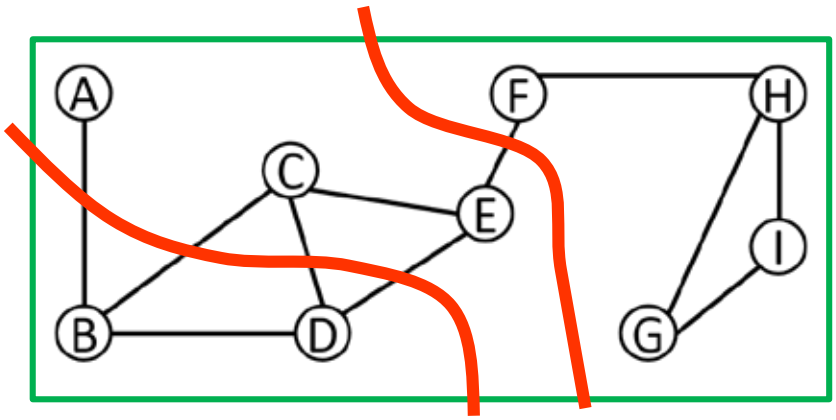
総費用＝６３

カットセットと連結性

定理: Gの枝集合 $T \subseteq E$ に対し，次が成立：
(V, T) は連結
　ç è 任意のカットセット$E(V', V'')$ に対し，$T \cap E(V', V'') \neq \emptyset$

証明
[è] $u \in V', v \in V''$ を選ぶ à u と v は路で繋がれている
　　à 路のいずれかの枝は$E(V', V'')$ の枝のはず
[ç] 対偶を証明：ある頂点 u と v は路で繋がっていない
　　à u を含む連結成分 V' に対し，$T \cap E(V', V \setminus V') = \emptyset$





これから考えること

- どうやって，全域木を求めるか？
  - 「全域木」のことをよく理解する
    è 全域木の求め方がわかる

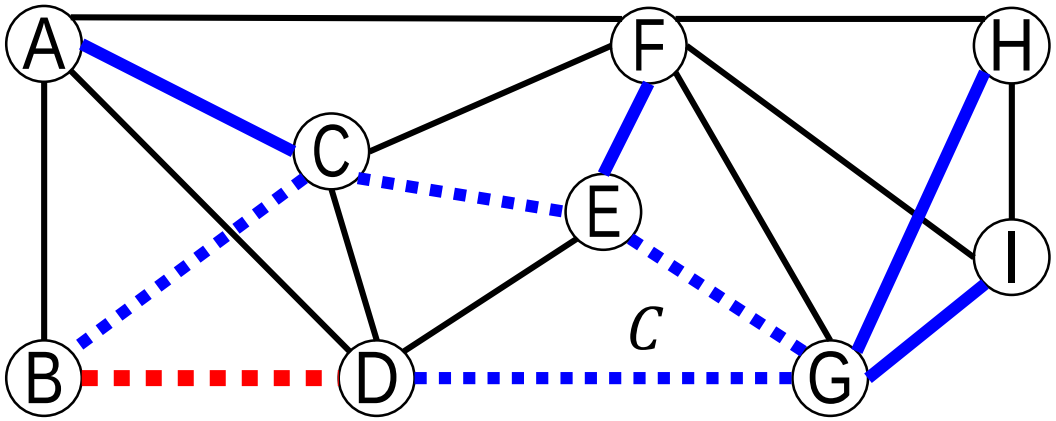
- どうやって，最小全域木を求めるか？
  - 「最小全域木」のことをよく理解する
    è 最小全域木の求め方がわかる

全域木に関する基本閉路

- 全域木 T へ，Tに含まれない枝 (u,v) をひとつ追加

è u と v の間には路が（ただ1つ）存在するので，

閉路が（ただ1つ）生じる　　（T と (u,v) に関する基本閉路）



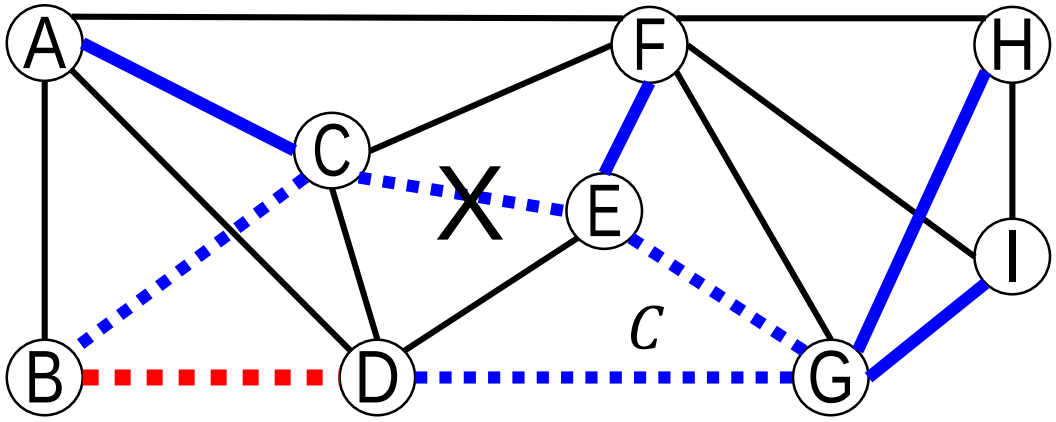
T+(u,v)の閉路は
なぜ
ただ1つか？

青い全域木（太い枝）と枝(B,D)に関する基本閉路
＝点線の枝集合

基本閉路と全域木

性質： **全域木** T **,** T**に含まれない枝** (u,v),
T **と** (u,v) **に関する基本閉路の枝** (s,t) **に対し,**
T'=T+(u,v)-(s,t) **は全域木になる**

証明：全域木の特徴付けに関する定理 ((1) ç è (5)) **を使う.**
枝数について, |T'| = |T| = |V| - 1 **が成立.**
T+(u,v) **の閉路は基本閉路のみ** à (s,t) **を削除するとなくなる**
à T' **は閉路を含まない**



青い全域木 (太い枝) に枝(B,D)**を追加,** (C,E)**を削除** è **新しい全域木**

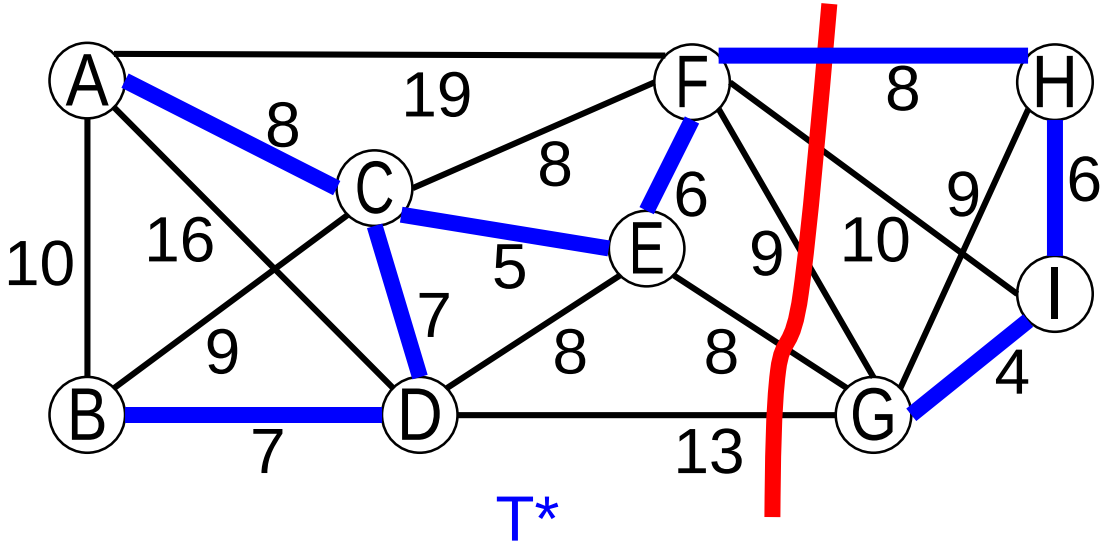
カットセットと最小全域木(1)

任意のカットセットの枝のうち，少なくとも1つは全域木に含まれる
à **カットセットの中で費用最小の枝を追加すると良い？** Yes!

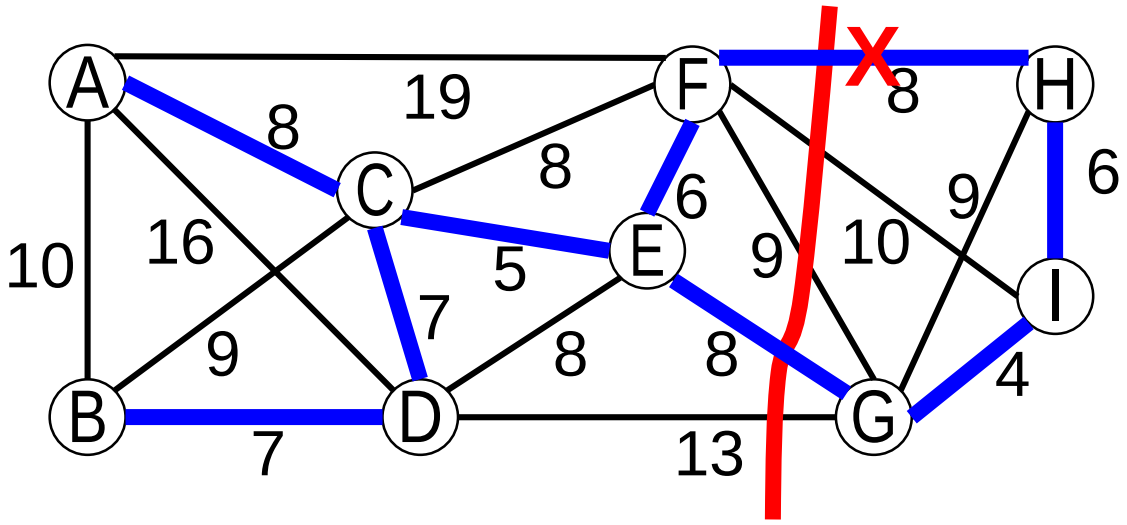
定理:
$E(V', V'')$: **任意のカットセット**
(u,v): **カットセット**$E(V', V'')$ **の中で費用最小の枝**
è (u,v)**を含む最小全域木**T*が存在

証明:
T: **任意の最小全域木**
⑴ T **が** (u,v) **を含む場合**: T*=T**とすればよい**
⑵ T **が** (u,v) **を含まない場合**:
T**と**(u,v) **に関する基本閉路** C **は，**
カットセットの枝(s,t)**で**(s,t)≠(u,v)**なるものを必ず含む** ⑴**なぜ？**⑵
è **基本閉路の性質より，** T* = T + (u,v) – (s,t) **もまた全域木**
(u,v) **の選び方より，** c(u,v)≦c(s,t) è T***の費用≦**T**の費用**
∴T***もまた最小全域木**

V’={G,H,I}, V’’=V – V’
に関するカットセットの中で, (F,H)**は費用最小**
è (F,H) **を含む最小全域木**T* **が存在**



同じカットセットの中で, (E,G)**もまた費用最小**
è T*+(E,G)-(F,H) **もまた最小全域木**



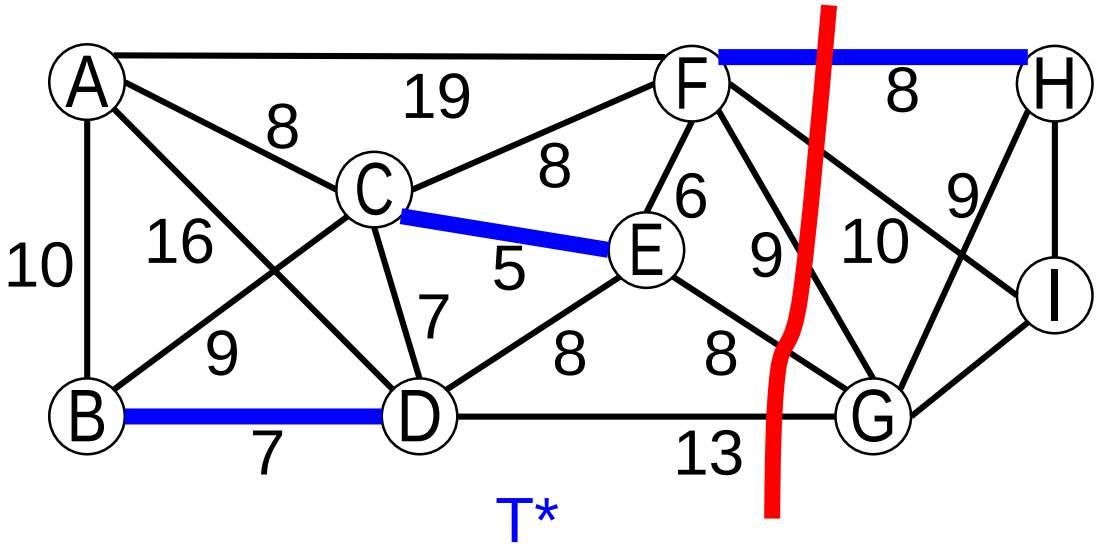
カットセットと最小全域木(2)

定理:
T': **ある最小全域木に含まれる枝集合**
$E(V', V'')$: $E(V', V'') \cap T' = \emptyset$ **を満たす，任意のカットセット**
(u,v): **カットセット**$E(V', V'')$ **の中で費用最小の枝**
è T' **および**(u,v)**を含む最小全域木**T*が存在

証明の概略： **前の定理と同様**

- (B,D), (C,E) **を含む最小全域木が存在する**
- V'={G,H,I}, V''=V – V'**に関するカットセットの中で，**(F,H)**は費用最小**

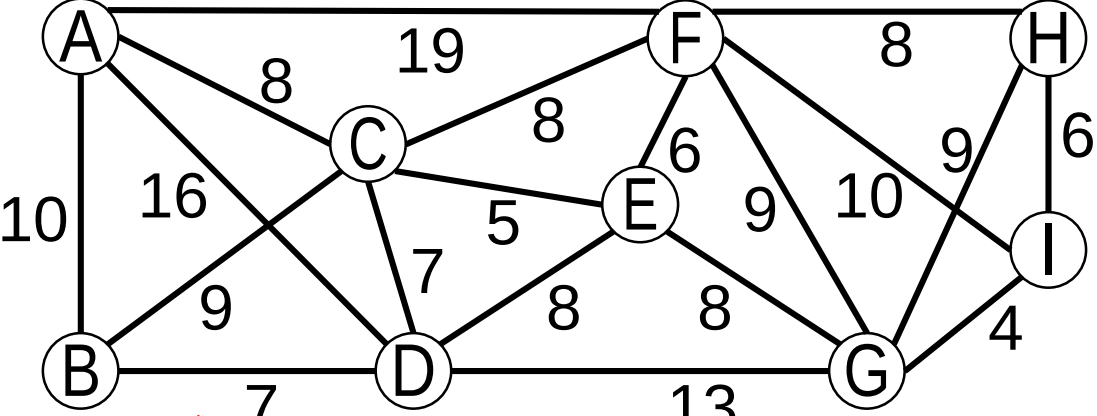
è (B,D), (C,E), (F,H) **を含む最小全域木**T* **が存在**

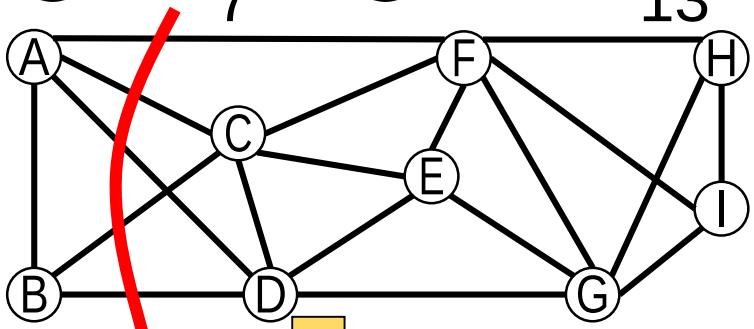


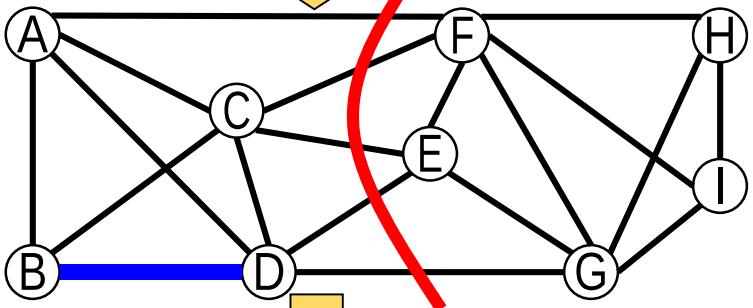
最小全域木の求め方

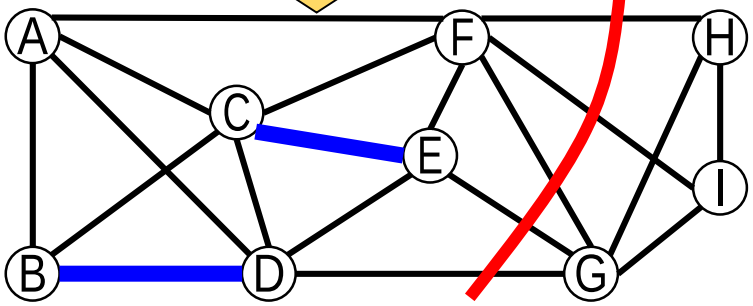
- グラフの枝を1つずつ選び，T に追加していく
- T が連結でない è T は，あるカットセットの枝を含まない
  è **そのカットセットの枝の中で，費用最小の枝を追加する**
- T が連結になったら終了（ç è 枝数が |V|-1 のとき）

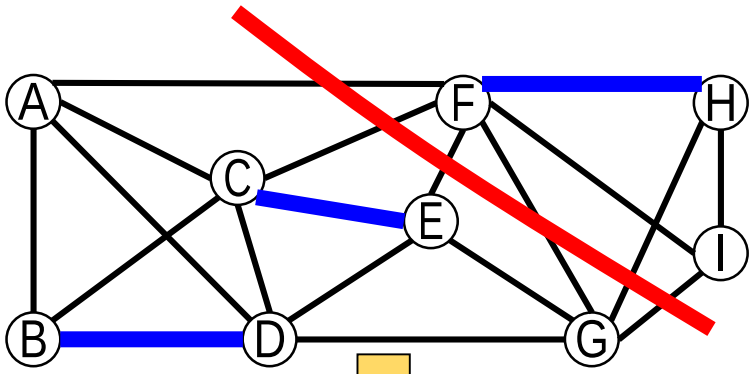
- 各反復で使うカットセットの選び方により，
  様々なアルゴリズムが得られる

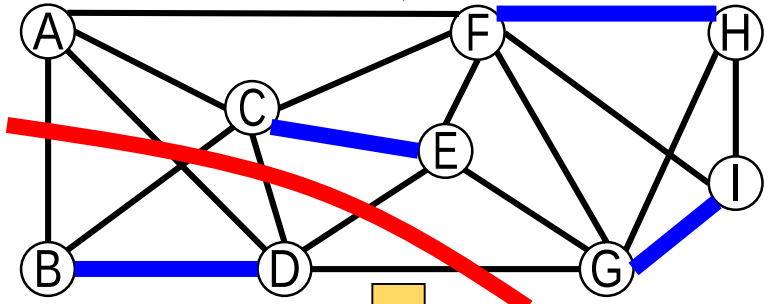

A
B
C
D
E
F
G
H
I
8
19
8
8
6
9
6
10
16
5
9
10
7
9
8
8
4
7
13

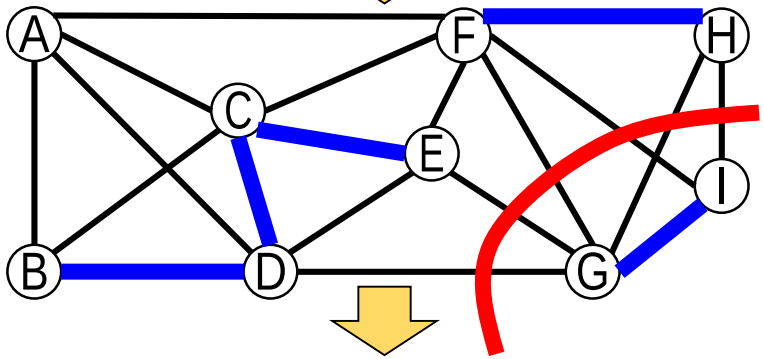

A
B
C
D
E
F
G
H
I

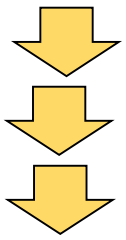

A
B
C
D
E
F
G
H
I


A
B
C
D
E
F
G
H
I


A
B
C
D
E
F
G
H
I


A
B
C
D
E
F
G
H
I


A
B
C
D
E
F
G
H
I



最小全域木を求める有名なアルゴリズム

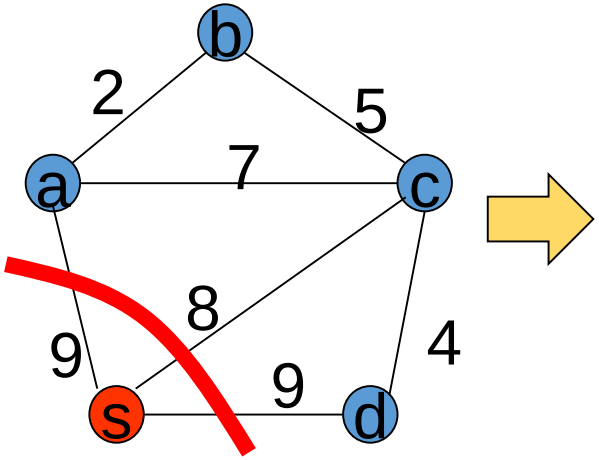
- 以下の2つが有名（それぞれ，提案した人の名前でよばれる）

- プリム(1957)（ヤルニーク(1930)）のアルゴリズム
  - 適当な頂点s を選び，固定
  - s を根として，木を徐々に成長させる．
  - その際，できるだけ費用の小さい枝を追加する

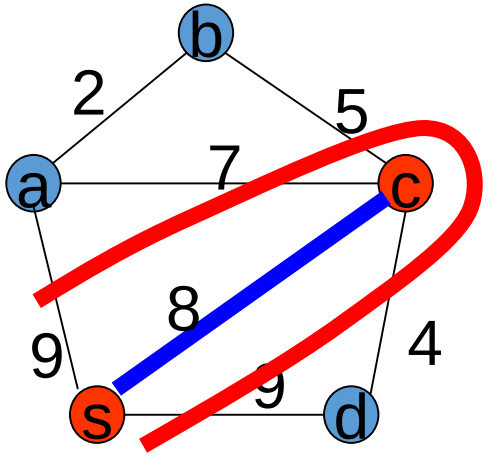
- クラスカル(1956)のアルゴリズム
  - 費用の小さい順に枝を追加
  - ただし，閉路が出来る場合は追加しない

プリムのアルゴリズム

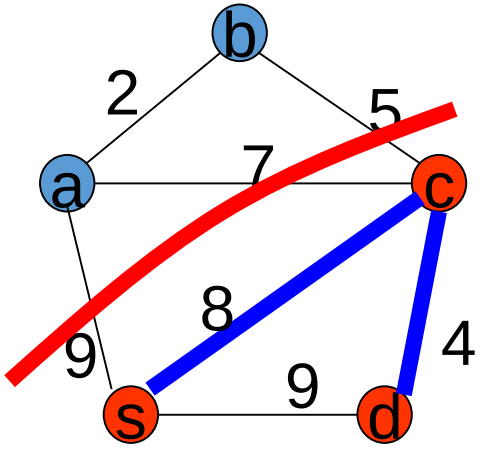
- 適当な頂点s を選び，固定
- s を根として，木Tを徐々に成長させる．
- その際，できるだけ費用の小さい枝をTに追加



V’={s}, V’’=V-V’ に関するカットセットに注目，費用最小の枝(s,c)を追加



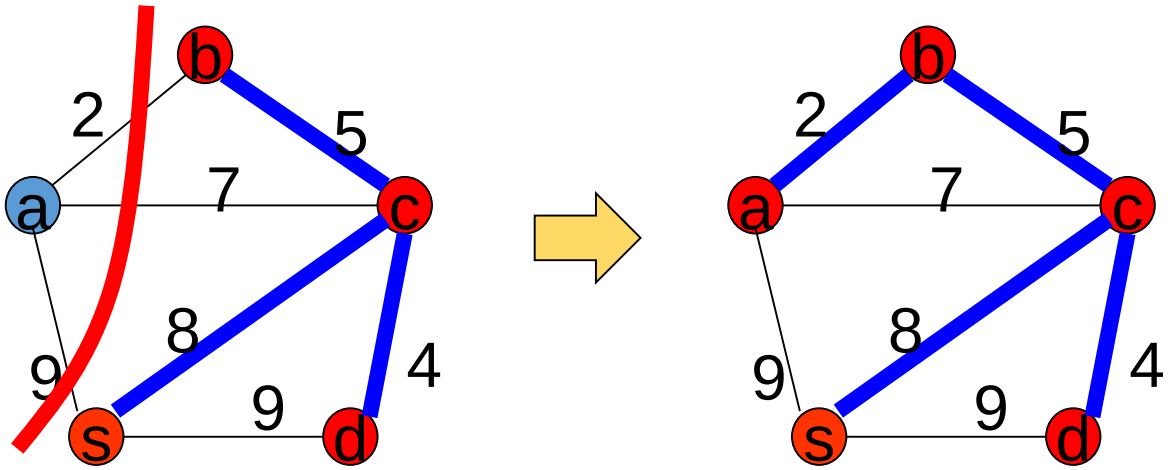
V’={s,c}, V’’=V-V’ に関するカットセットに注目，費用最小の枝(c,d)を追加



V’={s,c,d}, V’’=V-V’ に関するカットセットに注目，費用最小の枝(b,c)を追加

プリムのアルゴリズム

- 適当な頂点s を選び，固定
- s を根として，木Tを徐々に成長させる．
- その際，できるだけ費用の小さい枝をTに追加

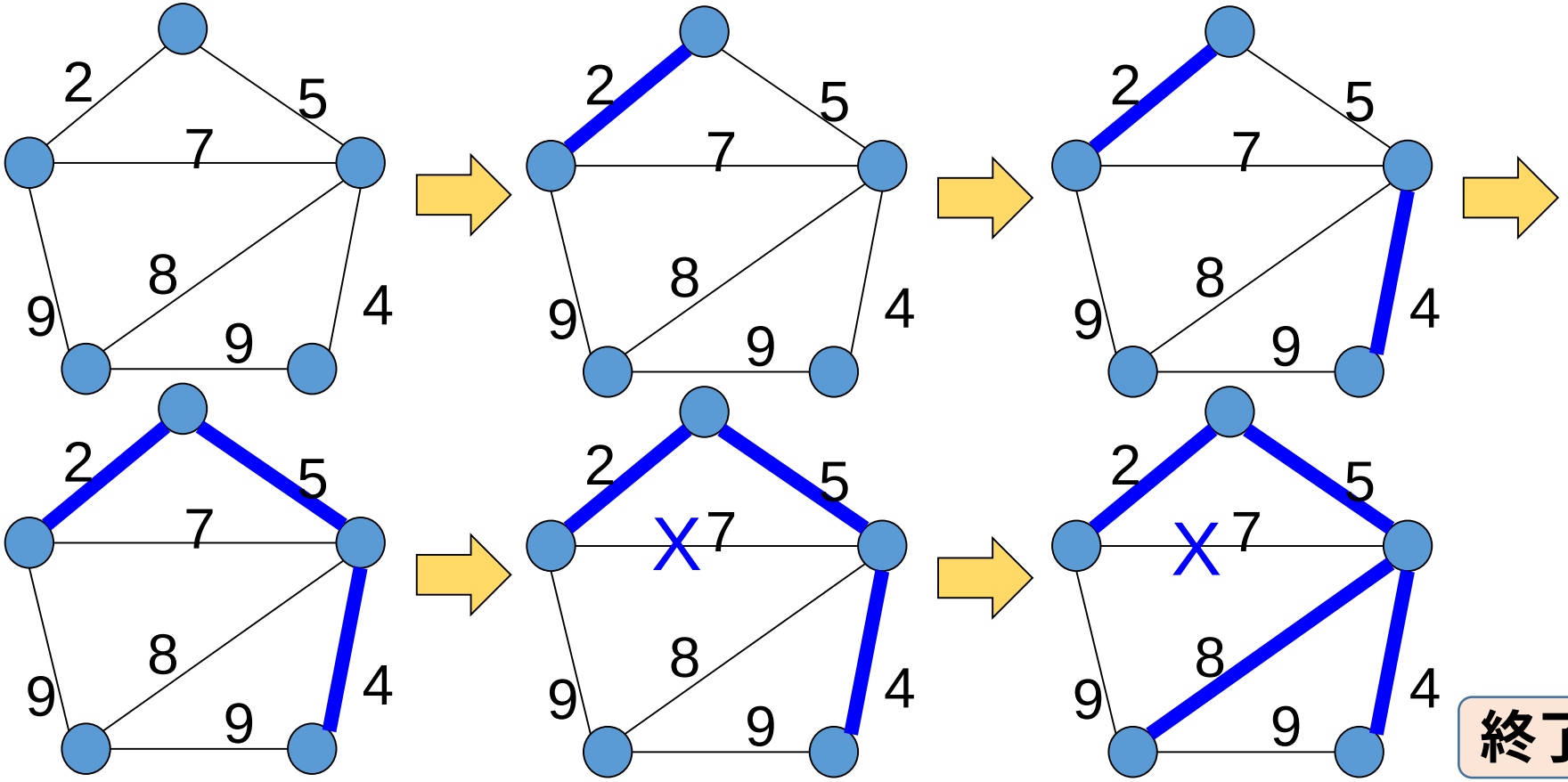


終了

V’={s,c,d,b}, V’’=V-V’
に関するカットセット
に注目，費用最小の
枝(a,b)を追加

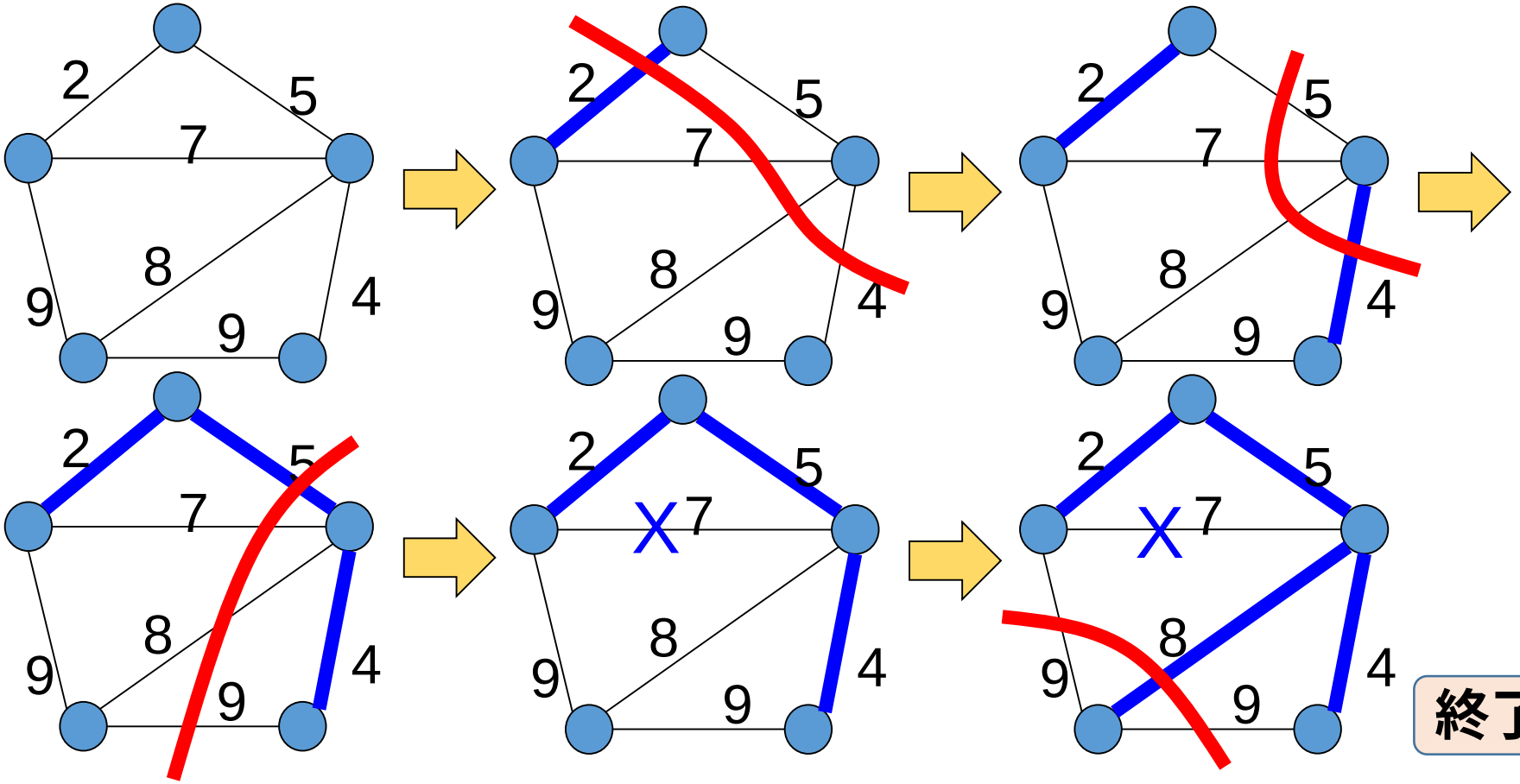
クラスカルのアルゴリズム

- 費用の小さい順に枝をTに追加
- ただし，閉路が出来る場合は追加しない



クラスカルのアルゴリズム

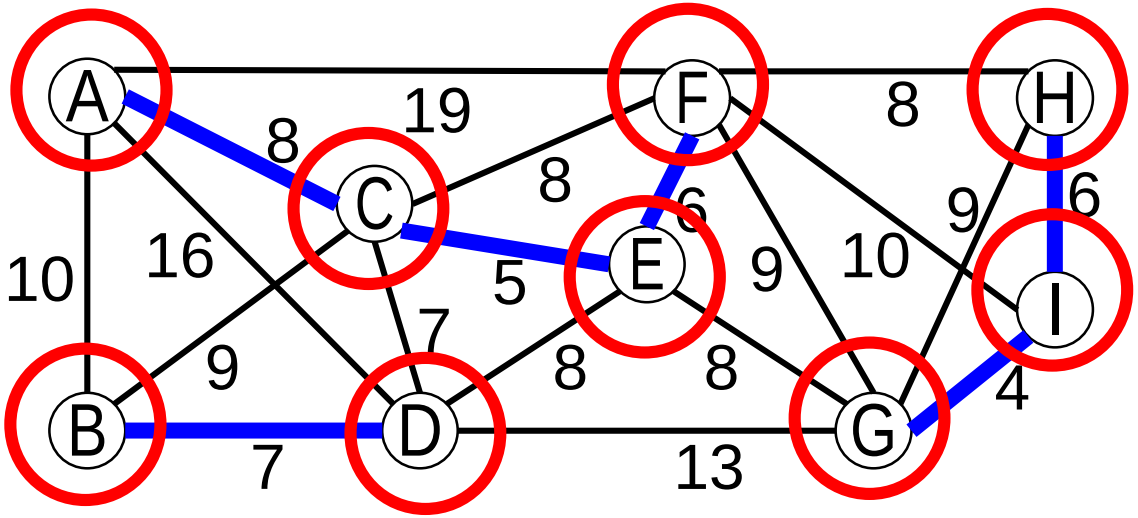
枝(u,v)をTに追加するとき，
(u,v)はあるカットセットの中で 費用最小の枝 è アルゴリズムの正当性



どのカットセットにおいても，費用最小でない

最小全域木を求めるその他のアルゴリズム

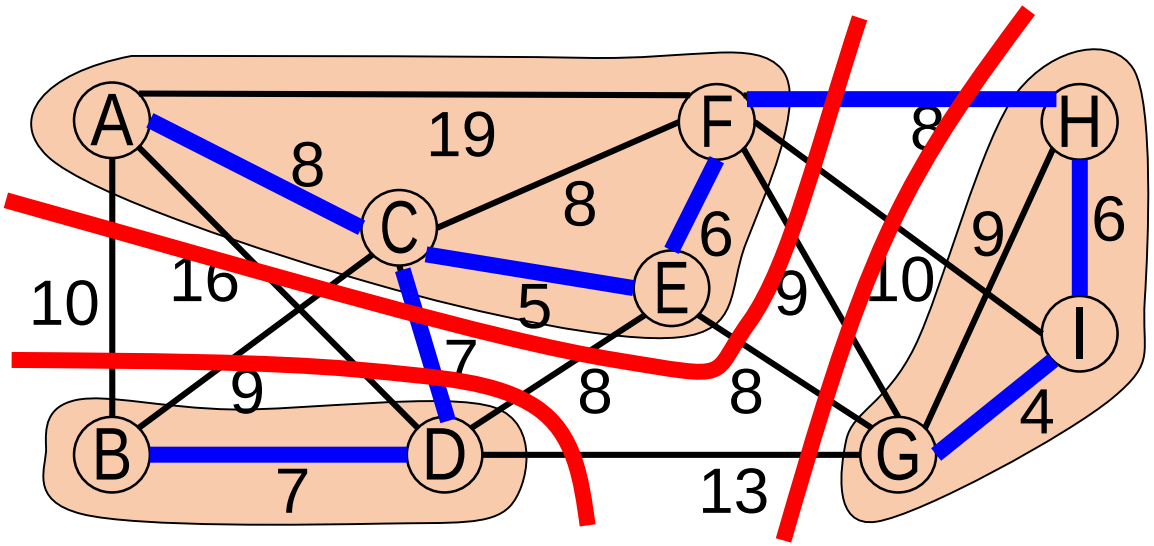
- ソリン(1961) (ボルーフカ(1926)) のアルゴリズム
  - 各連結成分の内外を結ぶ枝の中で，費用最小の枝を**同時に**追加



枝を何も選んでない状態
è 一つ一つの頂点が連結成分
è 各頂点から出る枝の中で，費用最小の枝を一つ選ぶ

最小全域木を求めるその他のアルゴリズム

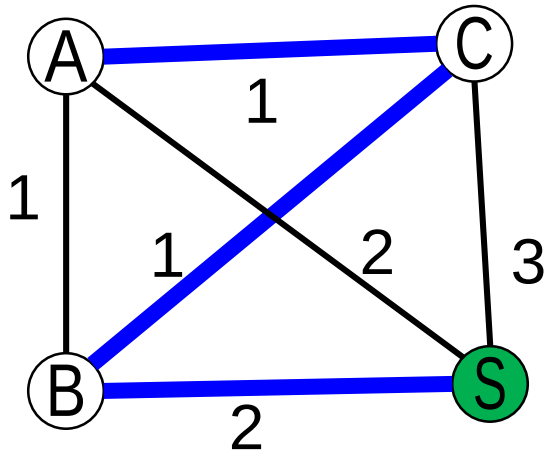
- ソリン(1961) (ボルーフカ(1926)) のアルゴリズム
  - 各連結成分の内外を結ぶ枝の中で，費用最小の枝を**同時に**追加



- 3つの連結成分が存在
- それぞれの連結成分から出る枝の中で，費用最小の枝を一つ選ぶ

応用：最小全域木構築の費用分担

- ネットワークを構築したい è 最小全域木を作る è 総費用4
  - Sは基地局（ソース）
  - その他の施設（A, B, C）の利用者（プレイヤー）で費用を負担
  - 費用をどう分担するか？



条件1：全プレイヤーの支払額の合計
＝最小全域木の総費用

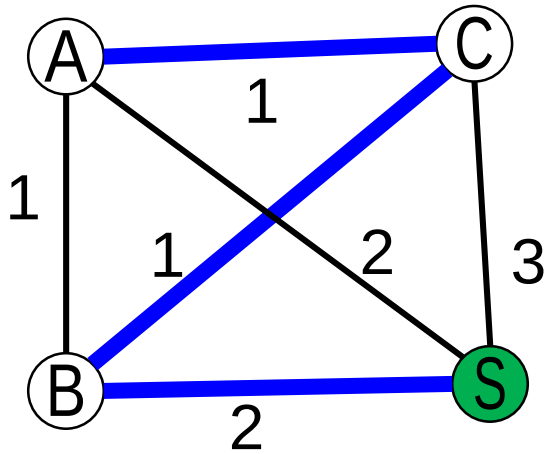
例：A = 3, B = 1, C = 0

条件2：「公平な分担にする」

「公平な」費用分担を求める問題：最小全域木ゲーム
（協力ゲームの中の，特性関数形ゲームの特殊ケース）

応用：最小全域木構築の費用分担

- ネットワークを構築したい è 最小全域木を作る è 総費用4
  - Sは基地局（ソース）
  - その他の施設（A, B, C）の利用者（プレイヤー）で費用を負担
  - 費用をどう分担するか？



条件1：全プレイヤーの支払額の合計
＝最小全域木の総費用

例：$p_A = 3,\ p_B = 1,\ p_C = 0$

コア：条件1，2を満たす費用分担

条件2：「公平な分担にする」ß いろいろな定式化が可能

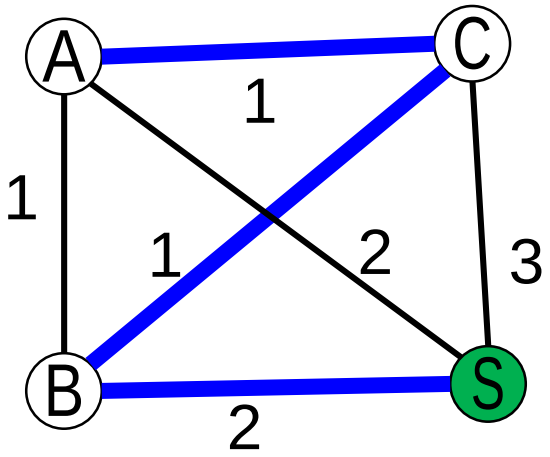
よく使われる条件：グループの支払額の合計
≦グループとソースに対する最小全域木の総費用

例：A の支払い＝3 è A は単独でネットワークを作った方が費用小

最小全域木ゲームとコア

条件1：全プレイヤーの支払額の合計＝最小全域木の総費用

条件2：グループの支払額の合計
≦グループとソースに対する最小全域木の総費用



$$p_A + p_B + p_C = 4,$$
$$p_A \leq 2,\ p_B \leq 2,\ p_C \leq 3,$$
$$p_A + p_B \leq 3,\ p_A + p_C \leq 3,\ p_B + p_C \leq 3$$

コア：条件1，2を満たす費用分担

コアの例：$p_A = 2,\ p_B = 1,\ p_C = 1$ や $p_A = 1, p_B = 2, p_C = 1$ など

定理 (Bird 1976): 最小全域木ゲームにおいて，コアは常に存在

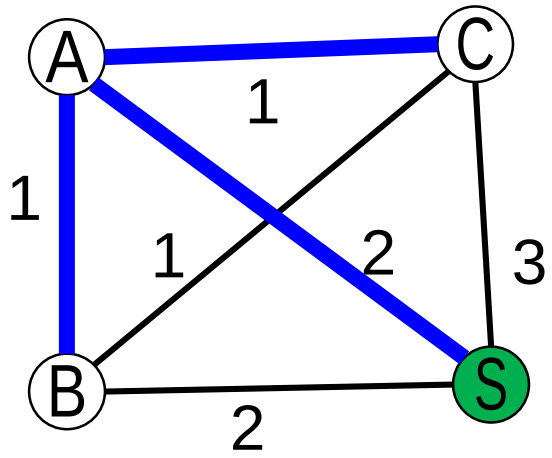
証明：「Bird 分担」とよばれる費用分担がコアであることを示す

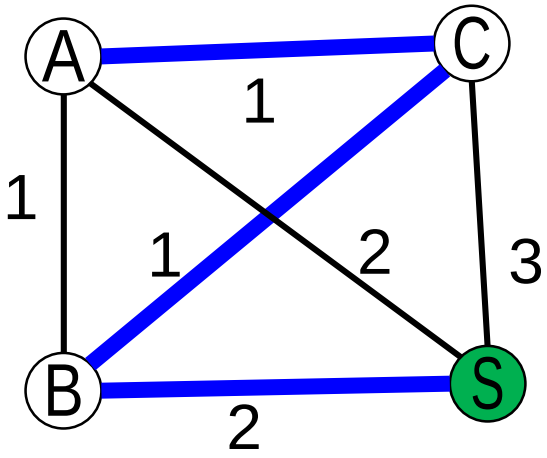
Bird 分担

Bird 分担の定義

- ソース S を根として，プリムのアルゴリズムにより最小全域木を求める
- $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ の順に頂点が追加されたと仮定
- $\left(v_i, f(v_i)\right)$: v_i が追加されたときの枝（ここで $f(v_i) \in \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$）
- v_i の支払額 p_{v_i} =枝$(v_i, f(v_i))$の費用

Bird分担の例：$p_A = 2,\ p_B = 1,\ p_C = 1$ や $p_A = 1, p_B = 2, p_C = 1$

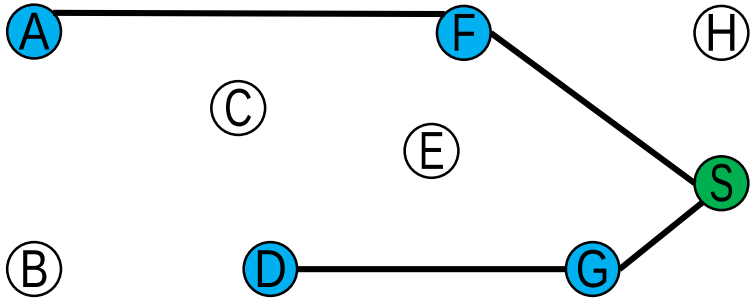




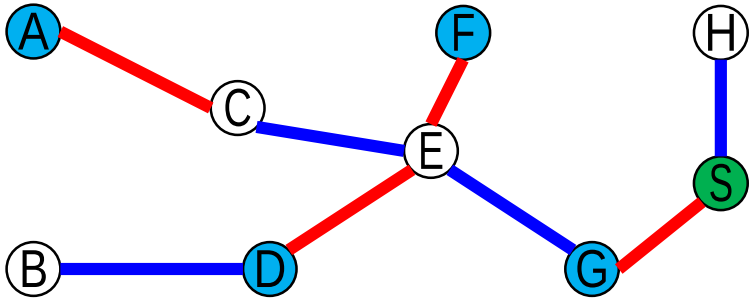
※Bird分担以外のコアも存在しうる

Bird分担がコアであることの証明

「条件2：グループの支払額の合計
≦グループとソースに対する最小全域木の総費用」
が成り立つことをチェックすれば良い
プレイヤーのグループ W に注目
$\alpha = W \cup \{s\}$ に対する最小全域木T'の総費用
β =グループ W の支払額の合計= $\sum_{v \in W} c(v, f(v))$
$\gamma = \sum_{v \in V \setminus W} c(v, f(v))$ è プリムによる最小全域木の総費用= $\beta + \gamma$



T'の総費用α



最小全域木の総費用= $\beta + \gamma$

参考資料：岡本吉央さんのスライド
http://jpn.nec.com/rd/datamining/rd/datamining/images/nec_datamining_seminar7.pdf

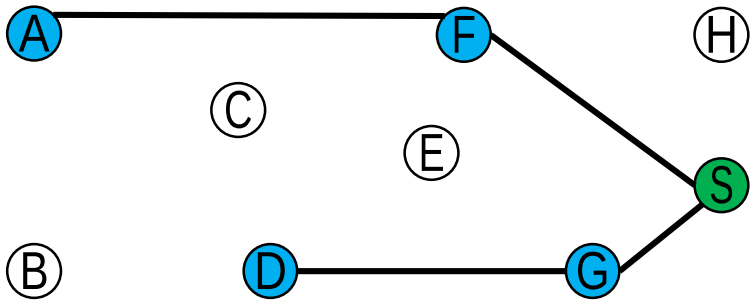
Bird分担がコアであることの証明（続き）

T’ に枝集合$\{(v, f(v)|v \in N \setminus W\}$を追加

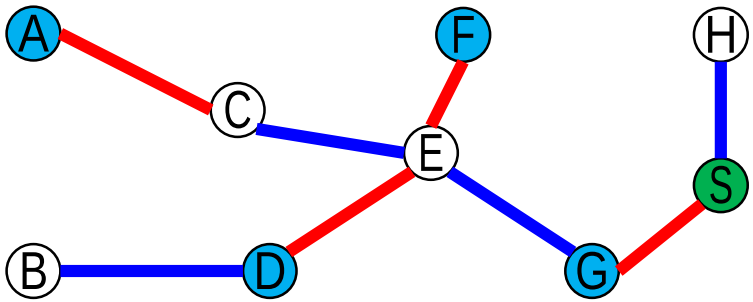
è 全域木になる（なぜ？）

この全域木の総費用$\alpha + \gamma$≧最小全域木の総費用＝$\beta + \gamma$

∴ $\alpha \geq \beta$ が成立



T'の総費用α

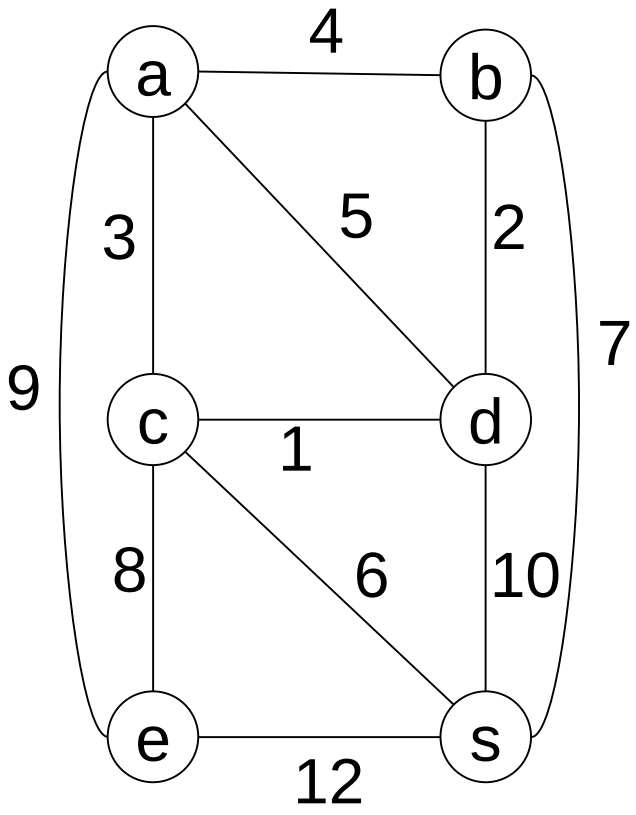


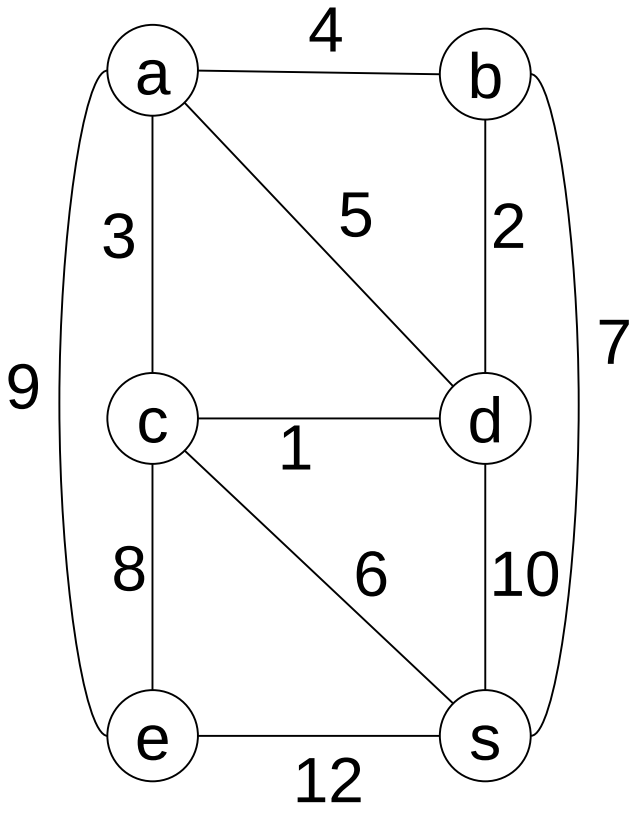
最小全域木の総費用＝ $\beta + \gamma$

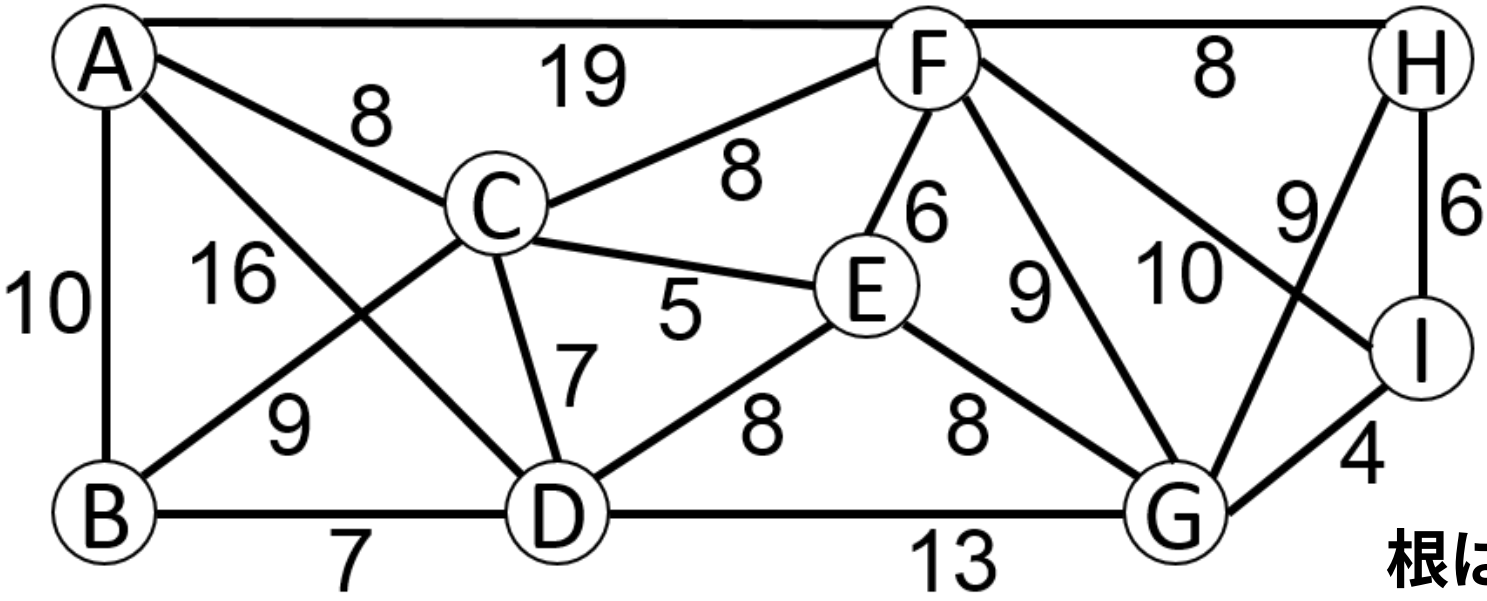
参考資料：岡本吉央さんのスライド
http://jpn.nec.com/rd/datamining/rd/datamining/images/nec_datamining_seminar7.pdf

演習問題

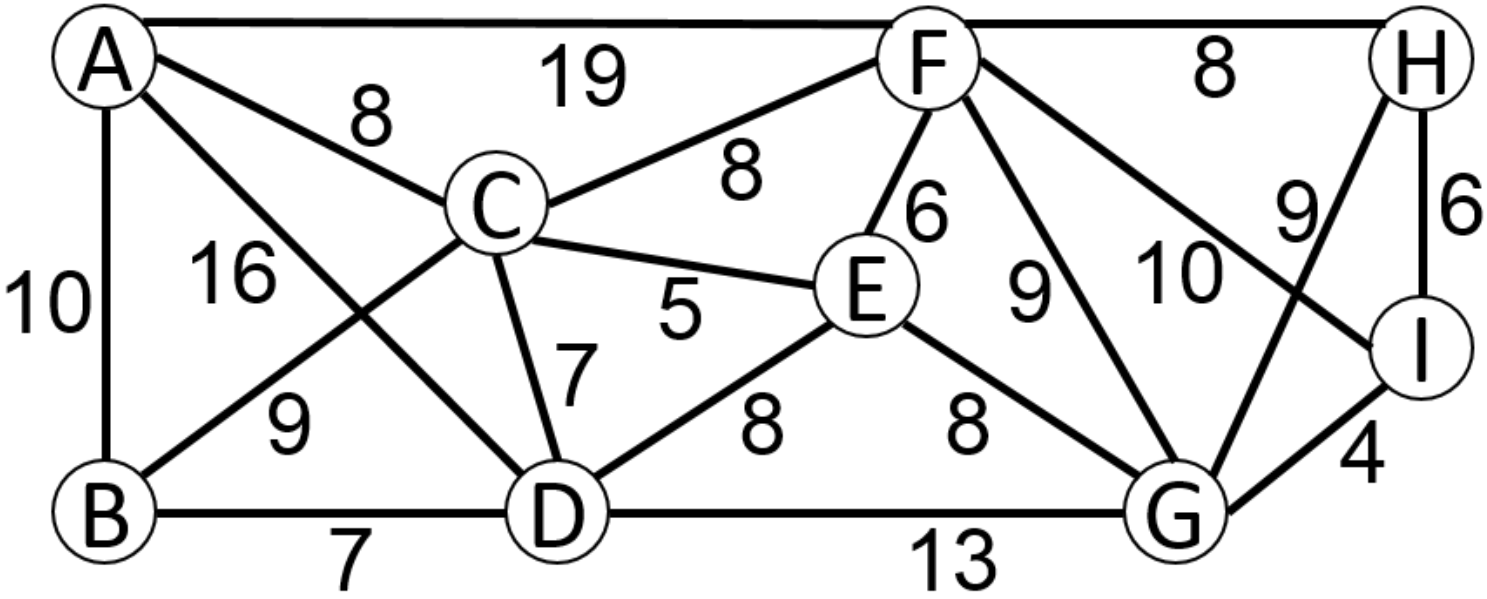
問題1：次の2種類のグラフに対して，クラスカルのアルゴリズム，プリムのアルゴリズムを実行してみなさい






A
F
H
C
E
I
B
D
G
19
8
8
8
6
9
6
10
16
5
9
10
7
9
8
8
4
7
13

根は適当に選んで良い


A
F
H
C
E
I
B
D
G
19
8
8
8
6
9
6
10
16
5
9
10
7
9
8
8
4
7
13

演習問題

問題2：

(2-a) **スライド24，25のグラフにおいて，Bird分担以外のコアを求めよ．そのようなコアで，全て整数値のものが存在するか？**

(2-b) **コア全体の集合を3次元の図で表現せよ．**

問題3：次の定理を証明せよ．

定理:
C: **任意の閉路（の枝集合）**
(u,v): **閉路** C **の中で費用最大の枝**
è (u,v)**を含まない最小全域木**T*が存在